RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 maggio 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Realtà fisica di alcuni spazî normali del Bianchi.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Le equazioni gravitazionali di Einstein sono state integrate rigorosamente da Schwarzschild [1] in un caso di fondamentale importanza (simmetria attorno ad un centro), che rispecchia (colla correzione derivante dalla relatività generale) l'attrazione newtoniana del Sole, rendendo esatto conto del secolare spostamento dei perieli dei pianeti, e segnatamente del perielio di Mercurio: risultato celeberrimo, già in precedenza ottenuto da Einstein mediante una integrazione approssimata (perfettamente bastevole per la valutazione numerica della disuguaglianza).

Indicherò qui un nuovo caso di integrazione non privo di interesse fisico, ponendo a base della mia deduzione le equazioni gravitazionali già ridotte a quella forma (spazialmente invariante) che conviene al caso statico e che fu oggetto di una mia precedente comunicazione [2].

Concettualmente si tratta di questo: Supposto che esista nel vuoto un campo elettrico ovvero magnetico uniforme (e costante anche rispetto al tempo), si domanda se e come un tale campo influisce sulla natura geome-

[1] *Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1916, pp. 189-196. Veggasi altresì la recente Memoria di Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung), Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1917.

[2] *Statica einsteiniana*, in questo volume dei Rendiconti, pp. 458-470.

trica dello spazio ambiente. Si trova che lo spazio non resta euclideo (come sarebbe in assenza del campo), ma si atteggia a varietà normale di Bianchi [1] con due curvature principali nulle, e la terza (quella corrispondente alle giaciture normali alle linee del campo) positiva e proporzionale al quadrato dell'intensità del campo. Il fattore di proporzionalità è, naturalmente, assai piccolo. Detta $\frac{1}{R^2}$ la curvatura non nulla, risulta ad es., per un campo magnetico di 25000 gauss, R dell'ordine di una decina di siriametri (siriametro = un milione di volte la distanza media fra la Terra e il Sole). Con tutto ciò non è escluso che qualche conseguenza (per es. il modo di variare della velocità della luce lungo le linee di forza) divenga controllabile con osservazioni di fisica cosmica.

Ad un ulteriore tipo, anche più elementare, di soluzione rigorosa si è condotti (n. 5), prefiggendosi che lo spazio assuma curvatura costante e che vi si esercitino sforzi puramente normali. Questo tipo si collega (n. 6) ad una questione molto dibattuta di statistica stellare, su cui si è testè rivolta l'attenzione di Einstein [2].

1. — Campi elettromagnetici stazionari.

Sia

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{1\,3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

l'espressione, in coordinate generali x_1, x_2, x_3, del quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico in una regione che si suppone sede di fenomeni elettromagnetici. Secondo la teoria di Einstein, questi fenomeni influiscono sulla natura metrica dello spazio, sicchè il ds^2 non sarà, in generale, rigorosamente euclideo. Comunque, in condizioni statiche, seguita a valere, anche nella detta teoria, lo schema elettromagnetico ordinario riferito alla metrica (1).

Ci atterremo al caso elementare in cui il campo consta di una sola delle due forze: elettrica ovvero magnetica. Indichi $X_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1,2,3)$ il sistema coordinato covariante di questa forza. Le sue componenti (in generale non ortogonali) secondo il triedro delle linee coordinate saranno in conformità $\frac{X_i}{\sqrt{a_{ii}}}$. Introdotti anche gli elementi reciproci

$$X^{(i)} = \sum_{j}^{1\,3} a^{(ij)}\, X_j \qquad (i = 1, 2, 3),$$

[1] *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti*, in questi Rendiconti, vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 59-68.

[2] *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1917, pp. 142-152.

porremo

$$8\pi u = \sum_{1}^{3} {}_i \, X^{(i)} X_i \,. \tag{2}$$

Le misure si intenderanno riferite al sistema elettrostatico assoluto, nel senso di Gauss-Hertz (1) (in cui la costante dielettrica e la permeabilità magnetica si considerano puri numeri, eguali all'unità per il vuoto). Con ciò, in seno ad un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), u rappresenta la densità di energia dovuta alla forza X_i, mentre il relativo tensore maxwelliano degli sforzi rimane definito dal sistema (covariante)

$$T_{ik} = u\, a_{ik} - \frac{1}{4\pi} X_i X_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

I singoli sforzi specifici (trattati come pressioni) risultano dai rapporti $\dfrac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}}$, il cui significato, per una data coppia di indici i, k, è: componente ortogonale secondo la linea x_k dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale normale alla linea x_i (o viceversa).

Dacchè il campo in questione si suppone essenzialmente stazionario, dovremo ritenere le X_i derivanti da un potenziale φ $\left(X_i = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$, escludendo dalle nostre considerazioni, se si tratta di forza magnetica, quelle eventuali porzioni di campo in cui ci sono correnti.

Assumiamo in particolare $\varphi = -Cx_1$ con C costante. Avremo

$$X_1 = C \quad , \quad X_2 = X_3 = 0 \,,$$

il che corrisponde ad una forza di intensità $|C|$ diretta secondo le linee x_1.

Se si suppone inoltre che le linee coordinate sieno ortogonali, ossia che il ds^2 abbia la forma

$$H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2 \,,$$

si ha dalle (2) e (3)

$$u = \frac{C^2}{8\pi H_1^2} \,. \tag{2'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_{11}}{H_1^2} = -u \quad , \quad \dfrac{T_{22}}{H_2^2} = \dfrac{T_{33}}{H_3^2} = u \,, \\ T_{ik} = 0 \qquad\qquad (i \neq k) \,, \end{cases} \tag{3'}$$

(1) Cfr. per es. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, B. I, § 61 [Leipzig, Teubner, 1912 (4ª edizione)].

ciò che rispecchia la caratteristica distribuzione degli sforzi maxwelliani, i quali sono tensioni sugli elementi normali e pressioni sugli elementi paralleli alle linee di forza, colla comune intensità u.

2. — Spazi B) del Bianchi.

Il Bianchi ha chiamato spazi *normali* quelli in cui le tre congruenze costituite dalle linee principali di curvatura risultano normali (ad altrettante famiglie di superficie), ed ha caratterizzato tutti gli spazi normali colle tre curvature principali costanti. Fra questi, a prescindere dal caso classico delle tre curvature eguali (spazi a curvatura costante), ce n'è un solo tipo che diremo B), cui spetta curvatura media $\mathfrak{M}$ positiva (1).

In esso due curvature principali sono nulle, e la terza, positiva, si identifica quindi con $\mathfrak{M}$. Posto

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{R^2} \qquad (\text{con } R > 0),$$

si può attribuire al quadrato dell'elemento lineare l'espressione

$$\text{B)} \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 \frac{x_2}{R}\, dx_3^2 ,$$

con riferimento al sistema triplo ortogonale, le cui linee coordinate formano le congruenze principali.

Ciò premesso, ricordo in generale che, ogniqualvolta le congruenze principali sono normali, ove si indichino con ω_i le tre curvature principali e con H_i^2 i coefficienti del ds^2 nella forma ortogonale corrispondente alle dette congruenze, valgono per le α_{ik} del Ricci (2) le espressioni canoniche

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{ii} = \omega_i H_i^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Per il ds^2 B), cui spettano le curvature $\omega_1 = \frac{1}{R^2}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$, si ricava in particolare

$$(4) \qquad \alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{11} = \frac{1}{R^2} \quad , \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0 .$$

Ci sarà comodo immaginare rappresentato uno spazio B) nell'ordinario spazio euclideo, interpretando x_1 , x_2 , $\frac{x_3}{R}$ come coordinate cilindriche: ordinatamente z , ϱ , ϑ , il significato di queste ultime lettere essendo manifesto.

(1) Bianchi, loc. cit., pag. 68.

(2) Negli spazi a tre dimensioni, queste α_{ik} sostituiscono con vantaggio i simboli di Riemann a quattro indici. Già ho avuto occasione di richiamarlo nel § 2 della Nota precedente.

Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due spazi, pur essendo diverse le loro due metriche. Alla espressione B) del ds^2 fa riscontro, per lo spazio rappresentativo, la determinazione euclidea in coordinate cilindriche

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 dx_3^2 .$$

Le due forme tendono a coincidere per R molto grande; in modo più preciso, risulta trascurabile il divario, allorchè il rapporto $\frac{x_2}{R}$ è abbastanza piccolo perchè si possa confondere il seno coll'arco. In ogni caso, le linee x_1 ed x_2 (rette parallele all'asse delle z e rette che lo incontrano normalmente, nello spazio rappresentativo) sono geodetiche anche nella metrica B).

3. — Produzione magnetica ovvero elettrostatica di uno spazio B).

Supponiamo che, in una porzione dello spazio ambiente, priva di materia ponderabile, si provochi un campo uniforme, per es. magnetico, come si realizza comodamente nell'interno di un solenoide percorso da corrente costante. Dobbiamo aspettarci (ammessa la relatività generale di Einstein) che lo spazio occupato dal campo non resti rigorosamente euclideo, tale modificazione di struttura geometrica dello spazio potendo implicare a sua volta una qualche (tenuissima) distorsione delle linee di forza, finchè si ristabilisce un completo equilibrio. Si tratta di determinare la natura dello spazio e l'assetto finale del fenomeno, a equilibrio raggiunto.

La risoluzione del problema va naturalmente desunta dalle equazioni generali della statica einsteiniana, in cui si attribuiscano alla densità di energia e agli sforzi le determinazioni corrispondenti al caso specifico.

Ecco in primo luogo le equazioni statiche (sotto la forma spazialmente invariante, di cui il § 2 della Nota precedente):

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = \varkappa u ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove u è la densità di energia (indicata nella precedente comunicazione con $\frac{T_{00}}{V^2}$); V la velocità di propagazione della luce; V_{ik} e $\Delta_2 V$ designano derivate covarianti e parametro di second'ordine riferiti al ds^2 dello spazio ambiente; le α_{ik} sono i corrispondenti simboli di Ricci; $\mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik} a^{(ik)} \alpha_{ik}$

la curvatura media; infine le T_{ik} costituiscono il tensore degli sforzi; e la costante

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}, \tag{5}$$

essendo f la costante di attrazione universale e c la velocità della luce nel vuoto, in assenza d'ogni azione perturbatrice.

Dico che, a regime stabilito, la sede del nostro campo uniforme è uno spazio B), *di cui le linee di forza* (sensibilmente rette) *costituiscono la congruenza principale* (geodetica) x_1, *corrispondente alla curvatura non nulla.*

Per dimostrarlo, basterà verificare che le (I), (II) rimangono soddisfatte, qualora:

1°) vi si introducano per le a_{ik}, α_{ik} le espressioni che loro competono nella metrica B);

2°) si attribuiscano alla densità di energia u e agli sforzi T_{ik} — che, nella supposta assenza di materia, provengono *esclusivamente* dal campo — le espressioni (2′) e (3′) coi valori $1, 1, \sin^2\frac{x_2}{R}$ di H_1^2, H_2^2, H_3^2;

3°) si determini in modo opportuno la funzione V.

In base alla (2′), in cui si faccia $H_1 = 1$, la (I) porge, coincidendo ora $\mathfrak{M}$ con $\frac{1}{R^2}$,

$$\frac{1}{R^2} = \varkappa u = \frac{\varkappa C^2}{8\pi}, \tag{6}$$

e determina così, in funzione dell'intensità del campo, la curvatura dello spazio normalmente alle linee di forza (l'unica che non rimane nulla). Atteso il valore (5) di $\varkappa$, si ricava

$$R = \frac{c^2}{\sqrt{f}\,C}. \tag{6′}$$

Dalla espressione generale delle derivate seconde covarianti

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_1^3{}^l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_l}$$

segue che, per la forma fondamentale B) e per una funzione della sola x_1, il sommatorio si annulla, talchè le derivate seconde covarianti non differiscono dalle ordinarie, e queste vanno tutte a zero ad eccezione di V_{11} che si riduce a V'' (l'apice indicando derivazione rispetto all'argomento x_1). Si ha poi [coi valori delle $a^{(ik)}$ corrispondenti a B)]

$$\Delta_2 V = \sum_{1\,ik}^{3} a^{(ik)} V_{ik} = V''.$$

Con ciò, quelle delle (II) che corrispondono a indici i, k distinti risultano pure identità. Le altre tre, ossia

$$\alpha_{ii} + \frac{V_{ii}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V} H_i^2 = - \varkappa T_{ii} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dànno, in base alle (3′) e (4),

$$\frac{1}{R^2} = \varkappa u \quad (i = 1) \quad ; \quad \frac{V'}{V} = \varkappa u \quad (i = 2, 3).$$

La prima coincide colla (6), e la seconda, introducendovi per $\varkappa u$ il suo valore $\frac{1}{R^2}$ ed integrando, porge

$$(7) \qquad V = c_1 e^{\frac{\varkappa_1}{R}} + c_2 e^{-\frac{\varkappa_1}{R}} \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti}).$$

4. — Ordine di grandezza di R.

Campi magnetici. — L'intensità C praticamente raggiungibile può ammontare a qualche decina di migliaia di gauss. Prendiamo 25000 a titolo di apprezzamento. Esprimendo anche c ed f in unità C. G. S., la (6′) dà R in centimetri. Ora $c = 3 . 10^{10}$, $f = 6{,}6 . 10^{-8}$, sicchè, arrotondando, risulta $R = \frac{3}{2} . 10^{20}$ cm. $= \frac{3}{2} 10^{15}$ Km. Se si nota che $\frac{3}{2} 10^8$ Km. è la distanza media Sole-Terra, si arriva alla conclusione che, *per un campo di 25000 gauss, il raggio di curvatura vale dieci milioni di volte la distanza media fra la Terra e il Sole, ossia dieci siriametri.* Esso varia in ragione inversa dell'intensità del campo; ma rimane comunque al di fuori d'ogni attuale possibilità sperimentale il ridurlo a dimensione apprezzabile entro un laboratorio. Non è invece da escludere che qualche altra previsione della teoria, per es. la variazione esponenziale della velocità V della luce lungo le linee di forza, quale risulta dalla (7), divenga osservabile in fisica cosmica.

Campi elettrostatici. — Per la valutazione numerica di R, seguita a valere la formula (6′), purchè l'intensità C del campo sia espressa in unità elettrostatiche. Indichiamo con C_v l'intensità in questione espressa in volt per centimetro. Sarà $10^8 C_v$ la sua misura in unità elettromagnetiche C. G. S.; quindi $C = \frac{1}{c} 10^8 C_v = \frac{1}{300} C_v$ è il numero da introdurre nella (6′), ricavandone, come sopra, R in cm.

Quando pur si attribuiscano a C_v valori tra i più alti finora raggiunti, diciamo $5 . 10^5$ (il che può essere giustificato, pensando che si tratta di campi nel vuoto, sì che non c'è da preoccuparsi delle scariche disruttive), si ha

per C il valore $\frac{5}{3}10^3$, che è appena la quindicesima parte di quello considerato nel precedente esempio di campo magnetico. Il raggio R risulterebbe in conformità 15 volte più grande.

5. — Soluzioni particolari nell'ipotesi che lo spazio assuma una curvatura costante K.

Varranno anzitutto le relazioni geometriche fondamentali

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \mathrm{K}\, a_{ik} & (i, k = 1, 2, 3), \\ \mathfrak{M} = 3\mathrm{K}, \end{cases}$$

con che la (I) diviene

$$(9)\qquad 3\mathrm{K} = \varkappa u .$$

Ne desumiamo $\mathrm{K} \geq 0$, il che rientra nell'osservazione generale della Nota precedente che, in condizioni statiche, la curvatura media $\mathfrak{M}$ è sempre positiva o nulla. La (9) stessa mostra poi che u è necessariamente costante assieme a K, ossia che il mezzo deve presentare una distribuzione uniforme di energia.

Nell'ipotesi che sia uniforme anche la distribuzione degli sforzi e che questi si esplichino normalmente, avremo altresì

$$(10)\qquad T_{ik} = p\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

con p costante positiva o negativa, secondochè lo sforzo normale cui si trova sottoposto ogni elemento del mezzo ha carattere di pressione ovvero di tensione.

Tenuto conto delle (9) e (10), le (II) divengono

$$(11)\qquad \frac{V_{ik}}{V} + \left(\mathrm{K} + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V}\right) a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

a cui si può soddisfare in due modi diversi.

1°. V *costante*. — In tal caso è necessario e basta aggiungere alla (9) la condizione

$$(12)\qquad \mathrm{K} + \varkappa p = 0 .$$

Dal loro confronto segue $p = -\frac{1}{3}u$, e si è condotti al seguente enunciato:

Entro un mezzo omogeneo uniformemente stirato con una trazione $\frac{1}{3}u$ (u densità dell'energia), lo spazio assume curvatura costante positiva $\mathrm{K} = \frac{\varkappa}{3}u$, la velocità della luce conservandosi costante.

Si noterà tuttavia che un tale mezzo non potrebbe essere costituito da materia ordinaria, nè allo stato fluido, nè allo stato solido. Non allo stato

fluido, perchè gli sforzi interni in tale stato hanno sempre carattere di pressioni; e nemmeno allo stato solido, perchè l'ordine di grandezza della trazione $\frac{u}{3}$ è ben superiore ai limiti di rottura. Un apprezzamento numerico si ha immediatamente, pensando che, detta μ la densità materiale di un eventuale mezzo solido nelle condizioni supposte, sarebbe sensibilmente $u = c^2\mu$ e si tratterebbe quindi di una trazione di $\frac{1}{3}c^2\mu = 3 \cdot 10^{20} \cdot \mu$ dine per cm^2.

2°. V *variabile*. — Dalle (11), moltiplicate per $a^{(ik)}$ e sommate rispetto ai due indici i e k, segue in primo luogo

$$\frac{\Delta_2 V}{V} + 3\left(K - \frac{\Delta_2 V}{V} + \varkappa p\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \tfrac{3}{2}(K + \varkappa p).$$

Le (11) stesse equivalgono quindi a

$$\frac{V_{ik}}{V} + K^* a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{13}$$

dove si è posto per brevità

$$K^* = K - \tfrac{1}{2}(3K + \varkappa p).$$

È facile riconoscere che le (13) risultano effettivamente compatibili, per V *non* costante, anzi costituiscono un sistema completo rispetto alla stessa V, considerata come funzione incognita, allora e allora soltanto che $K^* = K$ (1).

(1) Per stabilirlo, conviene ricordare [Ricci e Levi-Civita, Math. Ann., vol. 54, 1900, pag. 143] che le derivate seconde covarianti d'ogni sistema semplice V_i verificano le relazioni

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \sum_1^3{}_{jh}\, a_{klji}\, a^{(jh)}\, V_h \qquad (i, k, l = 1, 2, 3),$$

Ricorriamo ai sistemi E, e da un lato sostituiamo, ai simboli di Riemann, le $\alpha^{(pq)}$ di Ricci, a norma della formula

$$a_{klji} = \sum_1^3{}_{pq}\, \alpha^{(pq)}\, \varepsilon_{pkl}\, \varepsilon_{qji};$$

teniamo conto d'altro lato che, nel caso presente, $\alpha^{(pq)} = K a^{(pq)}$, talchè si può anche porre

$$\alpha^{(pq)} = \frac{K}{2} \sum_1^3{}_{\nu\rho\sigma\tau}\, a_{\nu\sigma}\, a_{\rho\tau}\, \varepsilon^{(p\nu\rho)}\, \varepsilon^{(q\sigma\tau)}.$$

Avuto riguardo alle identità

$$\sum_1^3{}_p\, \varepsilon^{(p\nu\rho)}\, \varepsilon_{pkl} = \varepsilon_{\nu k}\, \varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l}\, \varepsilon_{\rho k} \qquad (\nu, \varrho, k, l = 1, 2, 3),$$

Ciò richiede

$$3K + \varkappa p = 0 , \tag{14}$$

che, associata alla (9), porge $p = -u$, e dà luogo alle stesse considerazioni qualitative di poc'anzi.

Per l'integrazione delle (13), giova prendere il ds^2 (che ha per ipotesi la curvatura costante K) sotto la forma tipica [1]

$$\frac{1}{\psi^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{15}$$

con

$$\psi = 1 + \tfrac{1}{4} K . (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) . \tag{16}$$

Per le derivate covarianti V_{ik} si ricavano subito (dalla formula di definizione) le espressioni esplicite

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_k}\right) - \frac{\varepsilon_{ik}}{\psi}\sum_1^3{}^{l}\frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_l}$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$, 1 per $i = k$).

---

che giova aver presenti anche sotto la forma

$$\sum_1^3{}_{q}\, \varepsilon^{(q\sigma\tau)}\, \varepsilon_{qji} = \varepsilon_{\sigma j}\varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i}\varepsilon_{\tau j} \qquad (\sigma, \tau, j, i = 1, 2, 3),$$

e in cui, ben si intende, le ε a due indici valgono zero o uno secondochè questi indici sono distinti o coincidono, risulta

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \frac{K}{2}\sum_1^3{}_{j\lambda\nu\rho\sigma\tau}\, a_{\nu\sigma}\, a_{\rho\tau}\, a^{(j\lambda)}\, V_\lambda\, (\varepsilon_{\nu k}\varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l}\varepsilon_{\rho k})(\varepsilon_{\sigma j}\varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i}\varepsilon_{\tau j}) = K(a_{il}\, V_k - a_{ik}\, V_l)$$

Nell'ipotesi che le V_i sieno le derivate d'una funzione V che verifica le (13), si ha, dalle (13) stesse, moltiplicando per V e derivando covariantemente,

$$V_{ikl} = -K^* a_{ik}\, V_l ,$$

che, introdotte nelle precedenti, dànno luogo alle condizioni di integrabilità:

$$(K - K^*)(a_{il}\, V_k - a_{ik}\, V_l) = 0 ,$$

per ogni terna di indici i, k, l.

Dacchè, per ipotesi, V è un'effettiva funzione, una almeno delle sue derivate, diciamo per es. V_k, sarà diversa da zero. Fissiamo, nelle equazioni testè stabilite, questo valore di k e un valore di l diverso da k; e moltiplichiamo per $a^{(ik)}$, sommando rispetto all'indice i. Ricaveremo

$$(K - K^*)\, V_k = 0 ,$$

donde appunto $K - K^* = 0$, c. d. d.

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, pag. 345 [Pisa, Spoerri, 1902].

Portando nelle (13) e badando alla forma (15) del ds^2, nonchè alla (16), si ha in primo luogo

$$\frac{\partial^2(\psi V)}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k),$$

donde apparisce che

$$W = \psi V$$

dev'essere a variabili separate (somma di tre funzioni, una della sola x_1, una della sola x_2 e una della sola x_3).

Le rimanenti (13), in cui, ben si intende, si faccia $K^* = K$, dànno

$$\psi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} - \psi \sum_1^3{}^l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial V}{\partial x_l} + KV = 0,$$

ossia

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} W - \sum_1^3{}^l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_l} + \left\{ K + \sum_1^3{}^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l}\right)^2 \right\} \frac{W}{\psi} = 0.$$

In virtù della (16),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = \tfrac{1}{2} K \quad , \quad K + \sum_1^3{}^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_l}\right)^2 = K\psi,$$

talchè in definitiva l'ausiliaria W (a variabili separate) si trova sottoposta alle tre condizioni

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \sum_1^3{}^l \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\frac{\partial W}{\partial x_l} + \tfrac{1}{2} KW = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

con $\psi = 1 + \frac{1}{4} K.(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Data questa forma di ψ, ogni $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2}$ deve ridursi ad una costante, e risulta subito che la più generale soluzione è

$$W = b_0 \left\{ \tfrac{1}{4} K.(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 \right\} + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

le b designando costanti arbitrarie. Con tale espressione di W,

$$V = \frac{1}{\psi} W$$

costituisce in conformità l'integrale generale delle (13).

6. — Termine addizionale recentemente proposto da Einstein.

Riflessioni statistiche sulla distribuzione asintotica della materia nell'universo stellare hanno indotto Einstein [1] a saggiare l'introduzione di un

[1] La stessa ipotesi di una distribuzione quasi uniforme di materia nel mondo suggerì all'Almansi interessanti specificazioni positive e formali, inquadrabili nell'ordinario schema newtoniano. Cfr. *Le equazioni fondamentali della Dinamica e la legge di gravitazione* nelle Memorie di questa Accademia (Vol. IX, 1913, pp. 473-502).

piccolo termine correttivo (perfettamente compatibile coi postulati della relatività generale) nelle sue equazioni fondamentali. Queste erano (con referenza al ds^2 quadridimensionale)

$$(E) \qquad G_{ik} - \tfrac{1}{2} G\, g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3);$$

e dovrebbero modificarsi come segue:

$$(E') \qquad G_{ik} - (\tfrac{1}{2} G + \lambda)\, g_{ik} = -\varkappa T_{ik},$$

λ designando una costante universale positiva.

In condizioni statiche, la forma quaternaria

$$\sum_0^{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

si riduce a

$$V^2\, dx_0^2 - ds^2 = V^2\, dx_0^2 - \sum_1^{ik,3} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

ed è opportuno mettere in evidenza la metrica spaziale.

Se, in luogo delle (E), si accettano le (E'), si hanno, in luogo delle (I) e (II), queste equazioni statiche [1]:

$$(I') \qquad \mathfrak{M} - \lambda = \varkappa u,$$

$$(II') \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \left(\frac{\Delta_2 V}{V} + \lambda\right) a_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dacchè $\lambda > 0$, la (I') mostra che il termine complementare rende verificata *a fortiori* (escludendo il caso limite $\mathfrak{M} = 0$) la proprietà generale dello spazio fisico (da noi rilevata al § 1 della precedente Nota) di non poter mai assumere in condizioni statiche curvatura media negativa.

Se poi si introducono le ipotesi particolari del n. 5, supponendo che si tratti di spazio a curvatura costante K, sottoposto a sforzi normali, con che valgono le (8) e (10), le (I') e (II') assumono l'aspetto

$$(9') \qquad 3K - \lambda = \varkappa u,$$

$$(11') \qquad \frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V} - \lambda\right) a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Queste corrispondono manifestamente alle (9) e (11) del n. prec., identificandosi con esse per $\lambda = 0$. La discussione si fa nello stesso modo, col

[1] Il passaggio dalle (E') alle (I'), (II') si fa esattamente come dalla forma originaria (E) alle (I), (II) [§§ 1-2 della Nota prec., già più volte citata]: basta soltanto tener conto del termine addizionale in λ.

vantaggio che la presenza della costante λ lascia un certo margine a valori positivi di p.

Occupiamoci in particolare delle soluzioni, per cui V è costante. Alla (9′) dovremo associare la

$$K + \varkappa p = \lambda, \tag{12′}$$

talchè, eliminando K, otteniamo

$$3\varkappa p = 2\lambda - \varkappa u. \tag{17}$$

Per $p = 0$, si ha la soluzione particolare di Einstein

$$\bar{u} = \frac{2\lambda}{\varkappa} \quad , \quad \bar{K} = \lambda,$$

che caratterizza la distribuzione media $\bar{u}$ di energia (e quindi di materia) nell'intero spazio, supposto che esso sia (tranne divergenze locali) dotato di una curvatura costante, e riempito (in modo statisticamente uniforme) di materia incoerente, tra le cui particelle non si esercitano sforzi molecolari.

La (17) mostra che si può generalizzare la soluzione di Einstein, assumendo a piacere il valore di u (costante e ≥ 0). Con ciò si conserva la piena uniformità delle caratteristiche geometriche e meccaniche, ma non l'assenza di sforzi normali. Questi si esplicano come pressioni per $u < \bar{u}$, come tensioni per $u > u$. Ragionevoli induzioni sul comportamento della materia, per quanto diffusa, portano ad escludere la seconda eventualità: $\bar{u}$ si presenta quindi come un limite superiore della densità media di energia attribuibile all'universo stellare. Sia per ciò, che per l'assenza di sforzi che la caratterizza, la soluzione di Einstein presenta senza dubbio il maggior interesse speculativo.

Matematica. — *Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Socio Vito Volterra.

1. In altre Note (questi Rend. a. c.) ci siamo occupati di certe equazioni integrali singolari i cui nuclei sieno funzioni di combinazioni lineari delle variabili.

In questa Nota tratteremo delle equazioni che si riattaccano alla precedente classe, essendo l'estensione di un particolare tipo di essa.

Noi considereremo dunque le equazioni:

$$\varphi(x) + \lambda \Sigma a'_r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r |x - \varepsilon'_r s'_r|} \varphi(s'_r)\, ds'_r = f(x) \tag{A}$$

ove le ε'_r sieno della radice ν_r-esime dell'unità, a_r, b_r, costanti e la s'_r varii da $-\infty$ a $+\infty$ in modo che $\varepsilon'_r s'_r$ resti sempre reale.

2. Cominciamo dal trattare il caso più semplice: che cioè le ε'_r sieno tutte eguali all'unità e che $f(x) \equiv 0$.

Premettiamo perciò il

Teorema I. — *Se esiste la funzione* φ (che sarà derivabile almeno due volte, allora) *tale che*:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds = 0,$$

essa è eguale ad una certa combinazione di esponenziali

$$\varphi(x) = \Sigma k_r e^{\gamma_r x}.$$

Infatti, noi abbiamo

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda \int_{\alpha}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds + \lambda \int_{-\infty}^{x} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds + \lambda e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds = 0.$$

Derivando una volta, si ottiene:

$$\varphi'(x) + \lambda \Big\{ -be^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds +$$

$$+ be^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds - e^{-bx} \cdot e^{bx} \varphi(x) + e^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \Big\} = 0,$$

da cui, riducendo:

$$\varphi'(x) + \lambda \Big\{ -be^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds + be^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds \Big\} = 0.$$

Derivando una seconda volta, avremo:

$$\varphi''(x) + \lambda \Big\{ b^2 e^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs} \varphi(s)\, ds +$$

$$+ b^2 e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs} \varphi(s)\, ds + b\, e^{-bx} e^{bx} \cdot \varphi(x) + be^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \Big\} = 0,$$

cioè:

$$\varphi''(x) + \lambda \Big\{ b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s)\, ds + 2b\, \varphi(x) \Big\} = 0$$

ed infine, per l'equazione da cui siamo partiti:

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(x) = 0$$

che dimostra l'assunto.

Ne segue il

Teorema II. — *L'equazione*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r |x-s|} \varphi(s)\, ds = 0$$

ammette soltanto soluzioni della forma:

$$\varphi(x) = \Sigma h_r e^{\gamma_r x}$$

ove le γ_r *soddisfano all'equazione*:

$$1 - \lambda \Sigma \frac{2 b_r a_r}{b_r^2 - \gamma^2} = 0 \quad ; \quad -b_r > \gamma > b_r .$$

Si potrebbe poi mostrare facilmente che, se una delle γ fosse multipla d'ordine $\nu + 1$, al posto della costante h relativa, subentra un polinomio arbitrario d'ordine ν.

La prima parte del teorema II è immediata. Per dimostrare la seconda, si osservi che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s}\, ds = \int_{x}^{+\infty} e^{-bx} e^{(b+\gamma)s}\, ds + \int_{-\infty}^{x} e^{bx} e^{(-b+\gamma)s}\, ds .$$

Per la convergenza degli integrali (e perchè quindi l'integrale primitivo sia proprio) occorre e basta che $b + \gamma$ sia negativo e $-b + \gamma$ positivo: ciò che dà appunto

$$-b > \gamma > b .$$

Se qualcuna delle b fosse positiva, non vi sarebbero valori reali (e complessi anche) di γ soddisfacenti a tali condizioni: epperò le b devono necessariamente essere negative.

Se poi le a, b, γ fossero complesse, nelle diseguaglianze precedenti figurerebbero le loro parti reali.

Intanto, gli integrali dianzi scritti sono rispettivamente eguali a:

$$-\frac{e^{-bx} e^{(b+\gamma)x}}{b+\gamma} = -\frac{e^{\gamma x}}{b+\gamma} \quad ; \quad \frac{e^{bx} e^{(-b+\gamma)x}}{\gamma - b} = \frac{e^{\gamma x}}{\gamma - b} .$$

Ne segue quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s}\, ds = \left\{ \frac{-1}{b+\gamma} + \frac{1}{\gamma - b} \right\} e^{\gamma x} = \frac{-2b}{b^2 - \gamma^2} e^{\gamma x} .$$

Quest' ultima formola trae seco, come agevole conseguenza, la seconda parte del teorema.

3. Se dunque abbiamo:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, \varphi(s)\, ds = 0\,,$$

l'equazione algebrica caratteristica sarà

$$1 + \frac{2\lambda}{1-\gamma^2} = 0 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{1+2\lambda} \quad , \quad -1 < \gamma < 1\,.$$

Se $\lambda > -1/2$, le due radici sono reali; ma per la diseguaglianza scritta si vede che per $\lambda > 0$ non vi possono essere soluzioni.

Quindi, per

$$0 > \lambda > -\tfrac{1}{2}$$

la soluzione dell'equazione dianzi scritta è $e^{-\sqrt{1+2\lambda}\,x}$.

Se $\lambda < -\frac{1}{2}$, γ sarà immaginario; quindi la soluzione generale sarà $c_1 \operatorname{sen}(i\gamma x + c_2)$ con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Per $\lambda > 0$ gli integrali non convergono.

Quindi, mentre per $\lambda > 1/2$ può esistere una soluzione limitata, per $|\lambda| < 1/2$ essa certamente non esiste.

Ed in effetto, se applichiamo le considerazioni svolte nella già citata Nota, si trova che la costante k, è data da:

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|}\, ds = 2\int_{-\infty}^{0} e^{s}\, ds = 2.$$

Quindi la $|\lambda k| < 1$, dà proprio $|\lambda| < 1/2$ come condizione sufficiente, ma non necessaria, per la non esistenza di soluzioni limitate dell'equazione omogenea scritta.

4. Passiamo ora a trattare le equazioni più generali (A). In esse si deve implicitamente supporre che $f(x)$, $\varphi(x)$ sieno definite oltre che sull'asse reale, su tutte le rette $\varepsilon_r' \sigma$ (σ reale).

Con una semplice trasformazione di variabili, potremo poi ridurre la (A) al tipo:

$$\text{(B)} \quad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma\, a_r\, e^{b_r |x-s|}\, \varphi(\varepsilon_r s)\, ds = f(x) \quad [s \text{ reale}; \ \varepsilon_r^{\nu_r} = 1]\,.$$

Vale allora il

Teorema III. — *Se esiste una soluzione dell'equazione omogenea:*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds = 0 \quad (\varepsilon^{\nu} = 1)\,,$$

essa è una combinazione lineare di esponenziali.

Infatti, abbiamo che:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds =$$

$$= \varphi(x) + \lambda \left\{ e^{-bx} \int_{x}^{\infty} e^{bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds + e^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds \right\} = 0,$$

da cui, derivando:

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ -be^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds + \right.$$

$$\left. + be^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds - e^{-bx} e^{bx}\, \varphi(\varepsilon x) + e^{bx} e^{-bx}\, \varphi(\varepsilon x) \right\} = 0,$$

cioè

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ -be^{-bx} \int_{x}^{+\infty} e^{bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds + be^{bx} \int_{-\infty}^{x} e^{-bs}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds \right\} = 0.$$

Con una seconda derivazione otteniamo agevolmente:

$$\varphi''(x) + \lambda b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|}\, \varphi(\varepsilon s)\, ds + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0,$$

cioè

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0.$$

Indicando con

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_r(x) = \varphi_0(x),\ \ (\varphi_{r+h} = \varphi_h),$$

rispettivamente le funzioni:

$$\varphi(x),\ \varphi(\varepsilon x),\ \varphi(\varepsilon^2 x),\ \ldots,\ \varphi(\varepsilon^r x) = \varphi(x),$$

tale equazione diventa:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\rho}}\, \varphi_\rho''(x) - b^2 \varphi_\rho(x) + 2\lambda b \varphi_{\rho+1}(x) = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots r).$$

Si vede quindi che $\varphi(x)$ soddisfa ad un certo sistema di equazioni differenziali: ed è, anzi, una particolare combinazione lineare di esponenziali, a coefficienti legati da certe relazioni, a causa delle relazioni assegnate fra le φ_ρ.

In modo del tutto analogo si dimostrerebbe il

Teorema IV. — *Se esiste una funzione* $\varphi(x)$, *soluzione della*:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r|x-s|}\, \varphi(\varepsilon_r s)\, ds = 0$$

essa è una certa combinazione lineare (i cui coefficienti sono legati da

date relazioni) *di esponenziali* $e^{\gamma x}$. *Le* γ *soddisfano alla lor volta una certa equazione algebrica, e certe diseguaglianze.*

La prima parte di questo teorema è immediata. Per la seconda sostituiamo a $\varphi(x)$, $e^{\gamma x}$.

Avremo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r|x-s|}\varphi(\varepsilon_r s)\,ds = \int_{x}^{+\infty} e^{-b_r x}\,e^{b_r s}\,e^{\varepsilon_r\gamma s}\,ds + \int_{-\infty}^{x} e^{b_r x}\,e^{-b_r s}\,e^{\varepsilon_r\gamma s} =$$

$$= -\frac{e^{-b_r x}\,e^{b_r x}\,e^{\varepsilon_r\gamma x}}{b_r+\varepsilon_r\gamma} + \frac{e^{b_r x}\,e^{-b_r x}\,e^{\varepsilon_r\gamma x}}{-b_r+\varepsilon_r\gamma} = e^{\varepsilon_r\gamma x}\left\{\frac{1}{\varepsilon_r\gamma-b_r} - \frac{1}{\varepsilon_r\gamma+b_r}\right\}.$$

Ciò mostra che se la soluzione contiene un termine $e^{\gamma x}$, dovrà contenere anche tutti i termini $e^{\varepsilon_r\gamma x}$, e dà il modo per formare il sistema di equazioni — algebrico per le γ, e lineare pei coefficienti — da soddisfare.

Le limitazioni, poi, necessarie alla convergenza degli integrali. sono date dalle

$$\textit{parte reale di } (b_r+\varepsilon_r\gamma)<0 \quad ; \quad \textit{parte reale di } (-b_r+\varepsilon_r\gamma)>0$$
$$(r=1\,,\,2\,,\,..)\,,$$

valevoli contemporaneamente per tutte le γ che figurano nella soluzione.

5. Infine, nel caso. che non sia $f(x)\equiv 0$, le equazioni integrali sovra scritte. si ridurrebbero ad equazioni differenziali-funzionali non omogenee. usando sempre tale procedimenti. Tali equazioni poi, con l'introduzione di $\varphi(x)\,.\,\varphi(\varepsilon x)\,,\,\varphi(\varepsilon^2 x)\,.\,...$ si ridurrebbero a sistemi di equazioni differenziali non omogenee, con delle condizioni accessorie.

Quindi ,il tipo della soluzione generale. in tale caso, resta fissato in modo non dubbio.

Se però. in particolare, la $f(x)$ si può rappresentare con:

$$f(x)=\sum_{\rho} p_\rho\,e^{h_\rho x}\,,$$

si avrà subito (trascurando le quistioni di convergenza) che;

$$\varphi(x)=\sum_{\rho} q_\rho\,e^{h_\rho x}+\mathrm{H}(x)\,,$$

ove $\mathrm{H}(x)$ sia soluzione della corrispondente equazione singolare omogenea.

Devono però essere soddisfatte le relazioni derivanti dall'equazione data; si deve dunque avere:

$$\sum_{\rho} q_\rho\,e^{h_\rho x}+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{r,\rho} a_r\,e^{b_r|x-s|}\,q_\rho\,e^{h_\rho\varepsilon_r s}\,ds=\sum_{\rho} p_\rho\,e^{h_\rho x}\,.$$

Ma, uno dei termini sotto integrale, dà luogo (eseguendo l'integrazione) al termine:

$$a_r q_\rho \cdot e^{k_\rho \varepsilon_r x} \cdot \left\{ -\frac{1}{b_r + \varepsilon_r k_\rho} + \frac{1}{-b_r + \varepsilon_r k_\rho} \right\}.$$

Occorre quindi che il sistema di quantità h_ρ sia compreso nel sistema k_ρ; $\varepsilon_r k_\rho$; le relazioni intercedenti poi fra i coefficienti si vedono facilmente. Condizioni simili si otterrebbero sostituendo alle funzioni f rappresentabili mediante serie di Fourier, altre rappresentabili mediante integrali di Fourier.

6. Ad esempio di quanto precede, trattiamo l'equazione:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x+s|} \varphi(s)\, ds = 0 .$$

Avremo cioè:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-s} \varphi(s)\, ds + \lambda \int_{-\infty}^{-x} e^{x} e^{s} \varphi(s)\, ds = 0 .$$

Derivando due volte avremo quindi:

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + 2\varphi(-x) = 0 ,$$

da cui:

$$\varphi''(-x) - \varphi(-x) + 2\varphi(+x) = 0$$

poichè $\varepsilon = -1$; $\varphi_0(x) = \varphi(x)$; $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$.

Si vede subito che bisogna porre, come soluzione del sistema:

$$\varphi(x) = me^{\gamma x} + ne^{-\gamma x}$$

ed avere quindi:

$$(m\gamma^2 e^{+\gamma x} + n\gamma^2 e^{-\gamma x}) - (me^{+\gamma x} + ne^{-\gamma x}) + 2(ne^{+\gamma x} + me^{-\gamma x}) = 0$$
$$(m\gamma^2 e^{-\gamma x} + n\gamma^2 e^{+\gamma x}) - (me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) + 2(me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) = 0 .$$

Tali equazioni sono soddisfatte sempre e solo quando è soddisfatto il sistema indeterminato:

$$m\gamma^2 - m - 2n = 0$$
$$n\gamma^2 - n - 2m = 0 .$$

Posto $m = \mu n$, si ha subito l'altro sistema determinato:

$$\mu\gamma^2 - \mu - 2 = 0$$
$$\gamma^2 - 1 - 2\mu = 0 .$$

Tale sistema impone che $\frac{1}{\mu} = \mu$: e quindi $\mu = \pm 1$.

In corrispondenza si hanno per γ i valori $\gamma = \pm\sqrt{3}$; $\gamma = \pm i$.

Epperò la soluzione generale dell'equazione singolare scritto si otterrà con tali elementi.

Le condizioni per la convergenza sono:

parte reale di $(-1-\gamma) < 0$; parte reale di $(+1-\gamma) > 0$.

Le radici $\gamma = \pm i$ soddisfano a tali condizioni, essendo nulla la parte reale; non vi soddisfano invece le altre due.

Resta quindi, come soluzione generale della equazione scritta unicamente una combinazione lineare di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$: e precisamente, tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti, dedotte dall'equazione differenziale, resta il solo $\cos x$.

In altri lavori tratteremo delle equazioni integro-differenziali di tale tipo, e del caso che le ε non sieno radici dell'unità.

Matematica. — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di Salvatore Cherubino, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Secondo un teorema recentemente stabilito dal Rosati, ad ogni corrispondenza algebrica *speciale*, situata sopra una curva di genere $p > 1$, sono *associati* due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili (di 1ª specie). Se la *specie* della corrispondenza è $p - q$, questi due sistemi hanno le dimensioni rispettive $p - q - 1$ e $q - 1$ (1).

Ora, suppongasi di avere una curva di genere $p > 1$ con due sistemi regolari di integrali riducibili aventi le dimensioni rispettive $p - q - 1$ e $q - 1$. Esisteranno su di essa corrispondenze algebriche di specie $p - q$ aventi per sistemi associati i sistemi dati?

Se alla considerazione della curva si sostituisce quella della matrice riemanniana (unica, dal punto di vista della relazione di equivalenza) collegata ad essa, e alla considerazione delle corrispondenze situate su di essa, si sostituisce quella delle omografie riemanniane della matrice che ne dànno le *imagini*, il teorema di Rosati apparisce come caso particolare del teorema di Scorza (2) affermante che un'omografia riemanniana singolare di una matrice di Riemann ha per assi due assi della matrice, e la questione posta più sopra si riduce a quest'altra, più generale:

(1) Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica.*, ecc. Annali di Matematica, serie III, tomo XXV, pp. 1-32, n. 3.

(2) Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-118, n. 14.

Se una matrice di Riemann di genere $p > 1$ *ammette due assi delle dimensioni rispettive* $2(p-q)-1$ e $2q-1$ *esisteranno per essa delle omografie riemanniane singolari aventi per primo e secondo asse i due assi dati?*

La risposta è certo affermativa se i due assi sono indipendenti e cioè *complementari*, come è stato già osservato dal Rosati e dallo Scorza (1); ma non è tale senz'altro se i due assi sono dipendenti.

Ebbene noi vogliamo appunto esaminare in questa Nota sotto quali condizioni la risposta è affermativa anche per assi dipendenti, e quindi, in sostanza, vogliamo caratterizzare le coppie di assi di una matrice di Riemann che possono essere riguardate come coppie di assi di sue omografie riemanniane singolari.

I risultati a cui perveniamo sono raggiunti molto semplicemente: ma non ci sembrano privi di interesse perchè ed essi e le considerazioni che li forniscono si collegano intimamente con la teoria generale delle matrici di Riemann (2).

1. Cominciamo dal dimostrare che:

Se due matrici riemanniane sono isomorfe e un asse della prima è isomorfo ad uno della seconda, i complementari del primo asse sono isomorfi ai complementari del secondo (3).

Siano, infatti, ω e ω' le due matrici isomorfe, A_1 ed A_2 due assi complementari di ω, A'_1 ed A'_2 due tali per ω' e supponiamo A_1 isomorfo ad A'_1.

Siano

$$(1) \qquad B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,n} \quad \text{e} \quad B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{2,m}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di A_1 e A_2 rispettivamente. Il gruppo di tutti gli assi $B_{1,j}$ e $B_{2,h}$ sarà un gruppo fondamentale di assi puri di ω. Allo stesso modo, siano

$$(2) \qquad B'_{1,1}, B'_{1,2}, \dots, B'_{1,n'} \quad \text{e} \quad B'_{2,1}, B'_{2,2}, \dots, B'_{2,m'}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di A'_1 e A'_2, per modo che tutti gli assi (2) costituiranno un gruppo fondamentale di assi puri di ω'.

Se due matrici sono isomorfe, gli assi di ciascun gruppo fondamentale dell'una si riflettono in assi ad essi rispettivamente isomorfi, di un gruppo fondamentale dell'altra; inoltre dati due gruppi fondamentali di assi puri di una stessa matrice, essi possono esser sempre ordinati in modo che gli

(1) Rosati, loc. cit., n. 4; Scorza, loc. cit., n. 41 *d*).

(2) Mi sia qui consentito di ringraziare vivamente il prof. Scorza per i preziosi consigli e per gli aiuti prestatimi nella ricerca di cui è oggetto questa Nota.

(3) È già noto che i complementari di uno stesso asse di una matrice riemanniana sono tutti isomorfi tra di loro. Ved. Scorza, Mem. cit., n. 43.

assi dell'uno siano isomorfi a quelli corrispondenti dell'altro [1]: dunque per l'isomorfismo delle matrici ω e ω' deve essere $n + m = n' + m'$ e poi gli assi (1) e (2) debbono distribuirsi in $m + n$ coppie, ciascuna coppia contenendo due assi isomorfi e appartenenti l'uno alla serie (1), l'altro alla serie (2). Ma intanto, per l'isomorfismo di A_1 e A'_1 deve essere $n = n'$ e gli assi $B_{1,j}$ e $B'_{1,j}$ si debbono poter distribuire in n coppie di assi della specie ora detta, dunque dovrà essere pure $m = m'$ e poi gli assi $B_{2,h}$ e $B'_{2,h}$ dovranno potersi distribuire anch'essi in m coppie della solita specie.

Segue [2] che gli assi A_2 e A'_2 sono, come volevasi, isomorfi.

Nel teorema ora dimostrato è contenuto implicitamente quest'altro che, in certo senso, può ritenersi come l'inverso della proposizione sulle matrici riemanniane composte ultimamente invocata:

Se la matrice riemanniana composta $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix}$ *è isomorfa alla matrice riemanniana composta* $\begin{vmatrix} \omega'_1 & 0 \\ 0 & \omega'_2 \end{vmatrix}$ *ed è* ω_1 *isomorfa ad* ω'_1, *è anche* ω_2 *isomorfa ad* ω'_2.

Benchè evidente, non è forse inutile rilevare pure che se ω ed ω' coincidono, la proposizione stabilita si enuncia:

Se due assi di una matrice riemanniana sono isomorfi, sono tali anche i loro complementari.

2. È bene qui subito osservare che: *la totalità degli assi di una matrice riemanniana fra loro isomorfi non è necessariamente formata da tutti e soli i complementari di uno stesso,* ossia che *esistono matrici riemanniane possedenti coppie di assi non complementari tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro asse.*

Si consideri, ad es., una matrice riemanniana impura priva di assi isolati, i cui assi puri, che sono tutti isomorfi fra di loro [3], siano del genere p'. Il genere della matrice sarà un multiplo di p', poniamo rp', e due assi della matrice saranno isomorfi non appena avranno la stessa dimensione o, ciò che fa lo stesso, lo stesso genere [4]. Ma allora, come è evidentemente possibile, basta prendere due assi di questa matrice non indipendenti, l'uno del genere sp' (con s intero e minore di r) e l'altro del genere $(r - s)p'$, per avere due assi non complementari, ma tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro.

3. Ciò posto, possiamo subito dimostrare che:

Se un'omografia riemanniana di una matrice di Riemann è singolare, ciascuno dei suoi due assi è isomorfo ai complementari dell'altro.

(1) Scorza, Mem. cit., n. 49.
(2) Scorza, Mem. cit., n. 27.
(3) Scorza, Mem. cit., n. 46.
(4) Scorza, Mem. cit., n. 50.

E infatti, sia Ω un'omografia riemanniana singolare, di specie $2(p-q)$, della matrice di Riemann ω di genere p, e siano $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed $S^{\star}_{2q-1}$ i suoi assi, 1° e 2° rispettivamente, i quali sono anche assi della matrice.

L'omografia Ω, degenere nello spazio ambiente, è invece non degenere, ma sempre razionale, fra gli $S_{2(p-q)}$ della stella avente per centro $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed i punti di $S^{\star}_{2q-1}$. Dunque Ω subordina fra un qualsiasi complementare di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ ed $S^{\star}_{2q-1}$ una omografia *razionale non degenere* che muta i punti del primo spazio situati sull'imagine della matrice, nei punti del secondo situati sulla stessa imagine.

Cioè, i complementari di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ sono isomorfi ad $S^{\star}_{2q-1}$; e allora, per quanto è stabilito nel n. 1. anche i complementari di $S^{\star}_{2q-1}$ sono isomorfi ad $S^{\star}_{2(p-q)-1}$.

Viceversa: *Se* $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, $S^{\star}_{2q-1}$ *sono due assi di una matrice riemanniana ed è l'uno di essi isomorfo ai complementari dell'altro, detto* h *l'indice di moltiplicabilità di* $S^{\star}_{2q-1}$, *esistono* $h+1$, *ma non più, omografie riemanniane linearmente indipendenti della matrice, singolari di specie* $2(p-q)$ *aventi per primo asse* $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ *e per secondo asse* $S^{\star}_{2q-1}$.

Sia infatti S_{2q-1} un complementare di $S^{\star}_{2(p-q)-1}$. Poichè $S^{\star}_{2q-1}$ è isomorfo ad S_{2q-1}, l'indice di moltiplicabilità di S_{2q-1} è ancora h e il *carattere simultaneo* di $S^{\star}_{2q-1}$ ed S_{2q-1} è $h+1$ [1]; quindi esistono $h+1$, e non più, omografie razionali indipendenti e non degeneri che portano $S^{\star}_{2q-1}$ in S_{2q-1} e che mutano lo spazio $s^{\star}_{q-1}$ ($\bar{s}^{\star}_{q-1}$) di appoggio di $S^{\star}_{2q-1}$ con l'imagine τ ($\bar{\tau}$) della matrice, nello spazio s_{q-1} ($\bar{s}_{q-1}$) di appoggio di S_{2q-1} con l'imagine stessa.

Ognuna di queste $h+1$ omografie, moltiplicata a destra per la prospettività tra S_{2q-1} e la stella di vertice $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, dà luogo ad una omografia, anch'essa razionale e non degenere, fra i punti di $S^{\star}_{2q-1}$ e gli $S_{2(p-q)}$ passanti per $S^{\star}_{2(p-q)-1}$, la quale, a sua volta, ne determina *una*, singolare di specie $2(p-q)$, di S_{2p-1} in se stesso ed avente per primo asse $S^{\star}_{2(p-q)-1}$ e per secondo asse $S^{\star}_{2q-1}$. E quest'ultima essendo una omografia riemanniana per la data matrice, il teorema enunciato ne risulta dimostrato senz'altro.

4. Sia ora Ω una omografia di Riemann, degenere o non, della matrice riemanniana ω ed indichiamo con I l'omografia identica dello spazio rappresentativo, che è anch'essa riemanniana. Le omografie $\Phi = \Omega + \lambda I$, *con* λ *razionale*, sono tutte omografie riemanniane della matrice ω. Se Ω ha qualche spazio di punti uniti razionale, questi spazii rispondono ad altrettante radici razionali distinte dell'equazione caratteristica $D(\varrho) = 0$ della Ω, e sono assi della matrice [2].

[1] Scorza, Mem. cit., n. 16.
[2] Scorza, Mem. cit., n. 23

Ed allora, ponendo $-\lambda$ successivamente eguale a queste radici, si ottengono altrettante omografie riemanniane degeneri Φ le quali ammettono come assi precisamente i due spazii fondamentali coniugati corrispondenti a ciascuna di quelle radici, nella omografia Ω.

Dunque, per quanto è stato dimostrato al n. 3, si ha che:

In ogni omografia riemanniana, uno spazio di punti uniti che sia razionale ed il suo coniugato sono 2 assi della matrice l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.

5. Supponiamo ora che la matrice riemanniana ω sia quella dei periodi normali di certi p integrali abeliani di 1ª specie indipendenti di una curva di genere $p > 1$, su $2p$ cicli lineari indipendenti.

Tenendo presente che per ogni asse della matrice riemanniana si ha un sistema *regolare* di integrali riducibili sulla curva, e che ogni omografia riemanniana di ω è imagine di una *classe* di corrispondenze algebriche situate sulla curva, le proposizioni stabilite si traducono immediatamente in altrettante sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle corrispondenze algebriche della curva stessa.

Enunciamo soltanto queste ultime:

1° *Ad ogni corrispondenza algebrica di specie $p - q$, sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, sono associati due sistemi regolari di integrali riducibili di prima specie, uno ∞^{q-1}, l'altro ∞^{p-q-1}, ciascuno isomorfo ai complementari dell'altro: in particolare, i 2 sistemi predetti possono esser complementari.*

2° *Dati, sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, due sistemi regolari di integrali riducibili l'uno isomorfo ai complementari dell'altro e detto h l'indice di moltiplicabilità di uno dei 2 sistemi, esistono $h + 1$, e non più, corrispondenze algebriche linearmente indipendenti, speciali di specie eguale alla dimensione dell'altro sistema accresciuta di 1 ed aventi associati i sistemi stessi.*

Nelle quali proposizioni è contenuta quest'altra:

3° *Se sopra una curva algebrica di genere $p > 1$ esistono corrispondenze algebriche di specie $p - q$ aventi associati, ordinatamente, i sistemi regolari riducibili* A *e* B, *vi esistono anche corrispondenze di specie q aventi associati* B *ed* A.

4° *Ad ogni corrispondenza algebrica ad r valenze parziali* [1] *(semplici o multiple) sopra una curva algebrica di genere $p > 1$, sono associate r coppie di sistemi regolari di integrali riducibili, i sistemi di ciascuna coppia essendo l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.*

[1] Per la definizione di valenza parziale di una corrispondenza, vedi Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica*, Atti dell'Accademia di Torino, vol. 51 (1915-16).

Matematica. — *Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia.* Nota di Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques.

1. Se una superficie algebrica

$$f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

possiede una curva doppia, C, l'equazione del suo inviluppo

$$F_c(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0$$

ottenuta eliminando le x_i e il fattore di proporzionalità, ϱ, fra le cinque equazioni

$$(I) \qquad f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0 \ , \ \varrho u_i = \frac{\partial f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

svanisce identicamente, giacchè il sistema (I) riesce compatibile per qualunque quaterna di valori assegnati alle u_i (il che sta ad esprimere il fatto geometrico che ogni piano può essere considerato come tangente ad f_c, segandola f_c stessa secondo una curva dotata di punto doppio).

Tuttavia, se si considera la superficie f_c come limite di una superficie f, dello stesso ordine m, priva di singolarità, per es. limite entro un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, l'inviluppo F_c risulterà il limite dell'inviluppo F relativo alla f: così concepito l'inviluppo F_c appare come un inviluppo ben determinato, e solo in apparenza evanescente, di guisa che, dividendo per un fattore numerico che diviene nullo, è possibile ottenere un'equazione non identica: il che sembra contraddire a quanto sopra abbiamo osservato. Ma, considerando più da vicino la cosa, si riconosce come l'inviluppo limite di F dipenda dal modo con cui, entro il sistema delle superficie d'ordine m, ci si avvicina alla f_c, sicchè i varî inviluppi limiti hanno solo una parte comune; così F_c risulta decomponibile in un *fattore determinato*, diverso da zero, e in un *fattore indeterminato essenzialmente nullo*, dal quale non si può più estrarre — per una conveniente divisione — alcun altro fattore determinato. Più precisamente: *data una superficie* $f_c(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$, *dotata di una curva doppia* C (che per semplicità supporremo esser priva di punti multipli e presentar solo punti cuspidali ordinari per f_c) *l'inviluppo* $F_c(u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = 0$, ottenuto eliminando le x_i e ϱ fra le (I), *si decompone in quattro fattori*:

il primo fattore rappresenta l'inviluppo dei piani propriamente tangenti ad f_c;

il secondo fattore, che compare al quadrato, rappresenta i piani tangenti alla curva C;

il terzo fattore, che compare al cubo, rappresenta l'insieme delle stelle che hanno per vertici i punti cuspidali della curva doppia;

il quarto fattore, a cui è dovuto l'annullamento identico di F_c, *è il fattore indeterminato: esso rappresenta un insieme di stelle i cui centri appartengono alla* C, *ma sono del resto variabili dipendentemente dal modo di tendere al limite.*

Scopo della presente Nota è appunto quello di esaminare le circostanze in cui avviene lo svanimento identico, e la relativa riduzione in fattori, dell'inviluppo F_c: dalle quali circostanze seguono facilmente le note formule numeriche che danno la *classe della superficie* f_c *e il numero dei suoi punti cuspidali.*

2. Il problema della degenerazione dell'inviluppo di una superficie algebrica f, la quale acquisti una curva nodale C, è intimamente connesso al problema della degenerazione dell'inviluppo di una curva piana dalla quale si stacchi una parte (luogo) contata due volte; infatti i piani tangenti ad f passanti per un punto, O, dello spazio, inviluppano il cono che proietta il contorno apparente di f, relativo ad O: quando f acquista la curva nodale C, dal suddetto cono si stacca come parte doppia il cono O(C). Pertanto conviene esaminare a cosa si riduce l'*inviluppo di una curva piana* $k = 0$, d'ordine $2n + r$, quando essa viene a *spezzarsi* in una $c = 0$, d'ordine n, *contata due volte*, e in una parte residua, d'ordine r, $h = 0$ [1].

Supponiamo dapprima che la curva c non abbia singolarità e che incontri la curva h in nr punti distinti; allora se si considera la $c^2h = 0$ come limite di una curva k variabile in un fascio $c^2h - \lambda l = 0$, dove $l = 0$ è una curva generale d'ordine $2n + r$, l'*inviluppo limite di* k *si compone*:

α) *dell'inviluppo di* h;

β) *dell'inviluppo di* c, *contato due volte*;

γ) *dei* $(2n + r)n$ *fasci aventi come centri i punti base* P, *comuni alla* c *ed alla* l, *ciascuno contato una volta*;

δ) *degli* nr *fasci aventi come centri i punti* Q *comuni alla* c *ed alla* h, *ciascuno contato tre volte.*

Le prime due asserzioni seguono subito ove si consideri il limite delle tangenti alla curva variabile k condotte parallelamente all'asse y, i cui punti di contatto sono dati dalle intersezioni di

$$k(xy) = c^2(xy)\,h(xy) + \lambda l(xy) = 0$$

(1) La considerazione di una curva che si riduce ad una retta multipla, con certi punti di diramazione, conservando così un inviluppo determinato, s'incontra in Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*, § 29, dove tuttavia non si trova un'analisi del problema qui trattato.

con la polare

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 2ch\,\frac{\partial c}{\partial y} + c^2\,\frac{\partial h}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial l}{\partial y} = 0\,.$$

Per riconoscere invece che una tangente (almeno) va a cadere in ciascuno dei $(2n+r)n$ punti P comuni a c e l, basta osservare che sopra una retta p, passante per P, le curve del fascio $c^2h + \lambda l = 0$ segano una g^1_{2n+r} che ha in P un punto fisso, il quale — per un noto teorema (1) — appare doppio oltre che per il gruppo $\lambda = 0$, anche per il gruppo infinitamente vicino. Segue che la retta p è limite di una tangente condotta alla k da uno qualunque dei suoi punti.

Resta ora da dimostrare che un punto Q, comune a c e h, è limite di tre intersezioni della curva $k(xy) = 0$ con la sua polare $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$. A tale oggetto poniamo $\lambda = z$ e consideriamo le due superficie

$$\varphi = c^2(xy)\,h(xy) + z\,l(xy) = 0$$

$$\psi = 2c(xy)\,h(xy)\,\frac{\partial c(xy)}{\partial y} + c^2(xy)\,\frac{\partial h(xy)}{\partial y} + z\,\frac{\partial l(xy)}{\partial y} = 0\,!$$

queste hanno a comune oltre la curva piana c, una curva residua γ, passante per Q. Le intersezioni di k e della sua polare che — per $\lambda = 0$ — tendono a Q sono tante quante le intersezioni del piano $z = \lambda$ e della curva $c + \gamma$ che tendono al punto Q; ma le intersezioni di c col piano $z = \lambda$ restano fisse nei punti all'infinito di c, sicchè restano a considerarsi solo le intersezioni di γ. Ora la curva γ, appartenendo alla superficie φ passante semplicemente per Q e segata dal piano $z = 0$ secondo una curva dotata del punto triplo Q, ha tre intersezioni (almeno) riunite in Q col piano $z = 0$.

Si esclude poi che per un punto P venga a passare più di una tangente, e così pure più di tre per un punto Q, osservando che la classe di k vale:

$$(2n+r)(2n+r-1) = 2n(n-1) + r(r-1) + (2n+r)n + 3rn\,.$$

Ciò che si è detto si estende in generale, in qualunque modo varî la k, e qualunque siano le particolarizzazioni di c, h; basta osservare che se k tende a c^2h in una serie continua Σ, semplicemente infinita, l'inviluppo limite di k non varia sostituendo a Σ il fascio determinato dalla c^2h e dalla k infinitamente vicina: inoltre all'inviluppo di c e h vanno sommati i fasci corrispondenti ai loro punti multipli, e dall'inviluppo limite vanno tolti invece i fasci relativi ai punti singolari della curva k.

(1) Cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. I, libro 2°, § 5, pp. 179-180.

3. Veniamo ora all'esame dell'inviluppo, F_c, di una superficie f_c dotata di una curva doppia C (che supporremo essere priva di singolarità e presentare soltanto punti cuspidali ordinarî per la f_c); considereremo f_c come limite di una superficie f, dello stesso ordine m, del resto generale. Si fissi nello spazio un punto O: il contorno apparente di f, vista da O, sarà una curva K (segata su f dalla polare del punto O) d'ordine $m(m-1)$, la cui proiezione, fatta da O è una curva, k, dotata di

$$\frac{1}{2}\, m(m-1)(m-2)(m-3)$$

nodi e di

$$m(m-1)(m-2)$$

cuspidi, corrispondenti alle bitangenti e alle tangenti principali che escono da O (1). Se n è l'ordine di C, il contorno apparente di f_c sarà composto della curva C, contata due volte, e di una curva residua, H, d'ordine $m(m-1)-2n$; sicchè, quando f tende a f_c, la curva k si riduce a una curva c, proiezione di C, contata due volte, più una curva h, proiezione di H. Pertanto, in base a ciò che si è veduto al n. 2, possiamo dire che *quando f tende a f_c, il suo inviluppo* F *si riduce al limite all'inviluppo proprio di f_c, più l'insieme dei piani tangenti a* C, *contato due volte, più un certo numero di stelle coi centri su* C: un esame più minuto occorre per riconoscere quali di queste stelle siano indipendenti dal modo con cui f tende a f_c, figurando così nel fattore determinato di F_c, e quale ne sia la relativa molteplicità.

A tale oggetto si faccia tendere f ad f_c entro un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, $f_0 = 0$ essendo una generica superficie d'ordine m. Ora, se un punto A di C è centro di una delle stelle che fan parte dell'inviluppo limite di f, la sua proiezione A', che — essendo O generico — possiamo supporre essere un punto semplice della c, dovrà cadere in un punto P comune a c e alla k (proiezione del contorno apparente della $f_c + d\lambda f_0 = 0$) infinitamente vicina alla $c^2 h$, oppure dovrà coincidere con un punto Q, intersezione di c e h. Nella prima ipotesi si osserverà che la retta $OA = OP$ risulta tangente (impropriamente) alla f_c e alla superficie infinitamente vicina $f_c + d\lambda f_0 = 0$, sicchè la radice $\lambda = 0$ risulta doppia per l'equazione in λ che serve a determinare i gruppi dotati di punto doppio entro la g^1_m segata sulla OA dalle superficie del fascio. Poichè la f_c sega la retta OA secondo un gruppo di m punti di cui due soli coincidono in A, gli altri restando fra loro distinti, si deduce (2) che il punto A è un punto fisso per la g^1_m suddetta, appartenendo così alla superficie f_0.

(1) Formule di Salmon. Cfr. per es. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, parte II, n. 67.

(2) Cfr. Enriques-Chisini, op. cit., ibidem.

Pertanto *le stelle* A, *appartenenti al fattore determinato di* F_c, hanno il centro in punti la cui proiezione A′ risulta un punto comune a c e h, e quindi — essendo O generico — un tale punto A è un punto comune a C e a tutte le ∞^3 curve H (segate su f_c dalle sue polari): segue che dette stelle *hanno il centro nei punti cuspidali di* C.

Per riconoscere poi che una stella A, col centro in un *punto cuspidale* di C, figura esattamente *tre volte nel fattore determinato* di F_c, basterà dimostrare che la proiezione di un tal punto è un punto $A' = Q$ comune a c e h, che non è limite di un punto doppio di k, e che in esso non cade alcun punto P base per il fascio determinato dalla c^2h e da una k a questa infinitamente vicina. La prima affermazione segue dal fatto che la retta OA non è bitangente nè tangente principale alla f_c; la seconda invece si deduce osservando che — in base al ragionamento svolto poco sopra — se in A′ cadesse un punto P, il punto A sarebbe un punto appartenente alla curva base di un fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$ in cui si supponga variare la f.

E così l'enunciato del n. 1 è completamente stabilito, potendosi sempre considerare la f_c come limite di una superficie variabile in un fascio.

4. Ove si vogliano applicare le considerazioni precedenti alla *determinazione della classe e del numero dei punti cuspidali di una superficie* $f_c = 0$, *dotata di una curva doppia* C, occorre anzitutto riconoscere con precisione ove cadano i punti base comuni alla c^2h e alla k a questa infinitamente vicina. A tale scopo si supponga la f variabile entro il fascio $f_c + \lambda f_0 = 0$, e si consideri il fascio di curve determinato dalla k relativa a una f generica e da quella relativa alla f infinitamente vicina: questo fascio di curve ha $[m(m-1)]^2$ punti base dei quali

$$2\left[\tfrac{1}{2}\, m(m-1)(m-2)(m-3)\right]$$

cadono nei punti doppî di k, $3[m(m-1)(m-2)]$ nelle cuspidi di k, e infine $m^2(m-1)$ nei punti proiezione dei punti comuni al contorno apparente di f e alla curva base del fascio di superficie $f_c + \lambda f_0 = 0$.

Le affermazioni precedenti seguono dal fatto (la cui scoperta si può far risalire a De Jonquières) che due curve infinitamente vicine, dotate di nodi e cuspidi, hanno due intersezioni riunite in ogni nodo e tre in ogni cuspide (1), e dalla osservazione svolta innanzi che una tangente alla superficie f in un punto della linea base del fascio è tangente anche alla f infinitamente vicina.

Ciò posto sulla curva c si distingueranno quattro specie di punti particolari:

α) I punti A', proiezioni dei punti cuspidali della curva C: in A' la c e la h si tagliano senza oscularsi, e — come si è già osservato — non si ha sovrapposizione di alcun punto P.

(1) Cfr. per es. Enriques-Chisini, op. cit., vol. I, pag. 328.

β) I punti B', proiezioni dei punti B comuni alla curva C e alla curva H ulteriore intersezione di f_c con la polare di O (si escludono i punti A). La retta OB avendo in B un contatto tripunto con la superficie f_c, B è un punto comune a C e alla seconda polare di f, la quale ha ivi tre intersezioni con la curva $2C + H$, contorno apparente di f_c: pertanto i punti B' sono in numero di $n(m-2)$ e ciascuno di essi è limite di 3 cuspidi della curva variabile k; inoltre in B' la c e la h sono fra loro tangenti (essendo il piano per O tangente alla H in B propriamente tangente alla f_c). In un punto B' confluiscono due punti Q (ciascuno dei quali abbiamo visto assorbire tre fasci dell'inviluppo limite di una curva che tenda a c^2h); essendo B' limite di 3 cuspidi di k (e quindi al limite centro di 9 fasci, almeno) in esso devono cadere almeno 3 punti P. Si riconosce che cadono esattamente 3 punti P osservando che la c^2h ha proprio 9 intersezioni in B' con la k infinitamente vicina, e che questa non può avere 4 intersezioni con c senza averne 2 con h.

γ) I punti Γ', che sono i punti comuni a c e h diversi dagli A' e B': essi sono le traccie delle rette per O incidenti a C e tangenti (propriamente) altrove alla f_c. Così appare che un punto Γ' è limite di due punti doppî della k, e — tenuto conto che Γ' è un punto Q — si riconosce, come sopra, che in Γ' cade uno e uno solo dei punti P.

δ) I punti Δ', doppî per la c. Ed è chiaro come ciascuno di questi sia limite di 4 punti doppî della k e assorba 4 punti P.

Poichè nessun altro punto di c può esser limite di un nodo e di una cuspide della curva variabile k. gli altri punti P, diversi dai punti A', B', Γ', Δ', sono gli mn punti proiezione delle intersezioni di C con la f_0. Si deduce che i punti Γ' sono in numero di

$$x = nm(m-1) - nm - 3n(m-2) - 4d,$$

essendo d il numero dei punti doppî apparenti della curva C.

Conosciuto così il numero dei punti doppî della curva k che cadono sulla c $(2x + 4d)$ e quello $(3n(m-2))$ delle cuspidi, si valuta immediatamente la classe della curva residua h, cioè *la classe di* f_c, *che trovasi essere espressa dalla formula*

$$m(m-1)^2 - [n(7m - 4n - 8) + 8d];$$

similmente — in base ai numeri sopra determinati — si calcola il numero dei punti A', e quindi quello dei *punti cuspidali di* C, che è

$$y = n[m(m-1) - 2n] - 2n(m-2) - x = 2n(m - n - 1) + 4d.$$

Geodesia. — *La base geodetica di Vallona.* — Nota del prof. Luigi Carnera, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nei giorni 17, 20, 21, 22 e 23 aprile ultimi decorsi è stata misurata dal personale della R. Marina nella pianura del fiume Ducati, presso allo sbocco nella baia di Vallona, una base geodetica di 3458.7 metri, destinata a servire di fondamento alla triangolazione progettata per il rilievo cartografico dell'Albania, ed a venir collegata con la rete italiana nei pressi di Lecce. Riservando a speciale pubblicazione, che apparirà appena sia possibile negli Annali del R. Istituto Idrografico di Genova, la dettagliata relazione delle operazioni, ritengo non privo di interesse dare fin d'ora un cenno sommario dei lavori, e comunicare i risultati ottenuti dai primi calcoli.

Sembrami però anzitutto doveroso accennare qui che l'iniziativa di tali lavori è merito dell'ammiraglio Enrico Millo. Egli, coadiuvato dal tenente di vascello A. Zunino, volle si pensasse non solo a fare opera provvisoria, quale poteva esser richiesta dalle esigenze dell'attuale momento, ma si procedesse addirittura coi criterî della maggior precisione, onde provvedere anche ai bisogni futuri, accogliendo in ciò le vedute del direttore dell'Istituto Idrografico comm. Domenico Marchini. Questi poi apprezzando l'importanza dell'opera, volle aiutarla mettendo a disposizione della squadra non solo gli strumenti, ma inviando anche lo scrivente per dirigere quella parte dei lavori che richiedono speciale importanza, fra i quali appunto la misura della base.

La linea della base geodetica corre per un buon tratto quasi parallela alla strada che da Vallona si dirige verso la località di Ducati, e svolgendosi su di un terreno piano, attraversa il fiume stesso, e giunge alle prime colline ove sembra chiudersi la parte più orientale della vasta conca. Le catene di monti che corrono ai due lati della linea di base, quasi parallele, offrono ottimi punti di stazione per il rapido e razionale sviluppo della triangolazione. Misurato preventivamente il terreno con una cinta metrica da cento metri, nei punti fissati a distanza opportuna quali estremi di base, si costruirono, in apposite fosse, due monoliti in pietra e cemento, aventi una base quadratica di metri 1.50 di lato, e di un metro di altezza, in modo che il piano superiore risultasse circa 50 cm. al di sotto del livello del suolo. Nel centro della faccia superiore vennero murati i segnali individuanti i varî e proprî estremi della base, costituiti da una scatola cilindrica di bronzo recante sul suo fondo un disco di agata. L'estremo è segnato dal centro di una croce incisa sull'agata stessa, nel quale si erge un sottile cilindretto di argento, di circa un centimetro di altezza. L'intervallo compreso fra questi due estremi venne diviso in sei sezioni di lunghezza

press'a poco eguale, in modo da riuscire misurabili con 24 successivi riporti dei fili di acciaio « invar » aventi una lunghezza di 24 metri. A segnare i termini di queste lunghezze vennero costruiti dei blocchi di calcestruzzo di forma pressochè cubica di 50 cm. di lato in modo che la faccia superiore risultasse a fior di terra, e nel centro loro venne murato un picchetto di legno duro, recante nella parte superiore una vite, dotata di un forellino verticale, atto a reggere una sottile punta metallica di un centimetro circa di altezza. Il forellino venne fatto in modo che la punta avesse a risultare esattamente nel piano verticale passante per gli estremi di base. Ognuna delle sezioni venne poi divisa alla sua volta in due parti eguali mediante piccoli, ma robusti banchetti di legno, destinati a reggere i teodoliti di allineamento.

Analoghi banchetti di legno vennero costruiti preventivamente ai lati della base in corrispondenza degli estremi di base e di sezione, per riferire mediante teodoliti laterali i punti mobili di riferimento ai punti a terra. Durante i lavori preparatorî venne segnata su ogni banchetto l'esatta posizione in cui avrebbe dovuto trovarsi l'asse di rotazione verticale del teodolite per essere nel piano di allineamento della base, o nel piano ad essa normale a seconda che si trattava dei banchetti di allineamento o di quelli laterali. Così si rese facile e spedito il lavoro durante le operazioni di misura.

Il procedimento seguito nelle operazioni fu il seguente. Disposto un teodolite su di un banco di allineamento, e rettificato in modo da far segnare al filo centrale del reticolo il piano della base si disponevano i treppiedi portanti i punti mobili di riferimento in modo che questi fossero esattamente nel piano del filo. Si procedeva poi, mediante apposito livello a cannocchiale, alla determinazione dei dislivelli fra i successivi punti mobili di riferimento: indi servendosi successivamente di quattro fili, tenuti sospesi sugli appositi picchetti tensori, si misurava la distanza compresa fra i punti mobili, e finita la misura del segmento, se uno dei punti mobili si trovava al di sopra dei punti individuanti sul terreno gli estremi di sezione, con osservazioni angolari fatte mediante i teodoliti laterali si riferivano ai punti a terra le misure fatte sui punti mobili.

Non è qui il caso di accennare ai dettagli di queste singole operazioni, chè troppo sarebbe lunga la descrizione, mentre sommariamente la si trova già in relazioni di analoghi lavori fatti in altri paesi.

Dirò unicamente che le singole operazioni venivano eseguite da personale distinto, che attendendo sempre alle stesse cose assicurava grande rapidità di esecuzione, e precisione di risultati. All'allineamento dei treppiedi attesero il sottotenente di vascello Mezzadra, ed il tenente del genio ing. Ippolito, unitamente al disegnatore dell'Istituto Idrografico O. Nasi. Il dislivello dei punti di riferimento venne determinato dal guardiamarina

di complemento S. Mereghini; le misure con i fili furon fatte dai tenenti di vascello Fr. Toscano e Br. Brivonesi, mentre le osservazioni per le riduzioni ai punti a terra vennero fatte dai tenenti del genio ing. Meloni ed ing. Alimento.

I fili di acciaio « invar » usati in queste operazioni furono quelli forniti anni or sono (nel 1913) dalla ditta J. Carpentier di Parigi portanti i numeri 412, 436, 437 e 451, di cui preventivamente era stata fatta una campionatura all'Ufficio internazionale di pesi e misure di Parigi. Essendosi usati però questi fili in molte occasioni, fra cui anche per misure speditive in Affrica, non sarebbe stato prudente considerare ancor validi i valori allora trovati, e si preferì, come è costante abitudine dell'Istituto Idrografico, eseguire una speciale campionatura preventiva sulle basi sperimentali di Marola (Spezia) e Genova, per assicurarsi, con le misure di controllo da eseguire a lavoro finito nelle stesse località, anche contro le eventuali e sempre temibili variazioni. Partendo dai valori delle lunghezze risultanti per i singoli fili da quelle campionature, si ottennero i seguenti valori per le lunghezze delle sezioni:

Misura di andata:

	Filo 412	Filo 436	Filo 437	Filo 451
	metri	metri	metri	metri
Sezione I	576.35824	576.35537	576.35488	576.35574
id. II	576.33242	576.33147	576.33218	576.33173
id. III	576.28156	576.28261	576.28069	576.27985
id. IV	576.24532	576.24465	576.24582	576.24584
id. V	576.70125	576.70094	576.70199	576.70180
id. VI	576.82706	576.82658	576.82825	576.82854

Misura di ritorno:

Sezione VI	576.82765	576.82805	576.83113	576.82655
id. V	576.70322	576.70357	576.70386	576.70369
id. IV	576.24820	576.24917	576.24948	576.25108
id. III	576.28590	576.28593	576.28477	576.28484
id. II	576.32718	576.32710	576.32651	576.32700
id. I	576.35467	576.35419	576.35523	576.35566

Da queste si ricavano per l'intera base i seguenti valori:

	Andata:	Ritorno:	A.-R.	
	metri	metr		
Filo 412	3458.74585	3458.74682	— 0.97	millimetri
436	.74162	.74801	— 6.39	id.
437	.74381	.75098	— 7.17	id.
451	.74350	.74882	— 5.32	id.
Media	3458.74370	3458.74866	— 4.96	id.

Considerando le lunghezze ottenute coi singoli fili, come valori indipendenti della lunghezza della base, e gli scarti del valore medio quali errori accidentali di misura, mentre in realtà contengono ancora quello sistematico della non esatta campionatura dei fili, si ottiene quale lunghezza definitiva della base il valore: metri 3458.74618, con un errore medio di $\pm$ 1.09 millimetri, che mentre è ancor lontano dal vero e proprio errore medio assoluto, perchè in esso non si è tenuto conto del grado di incertezza di cui è affetta la lunghezza accolta per i singoli fili, dà però un criterio sufficente per giudicare della precisione, con cui vennero eseguite le misure sul terreno, e che è conseguibile con tali metodi. Paragonando questo valore con quelli analogamente ottenuti sia in Italia, che all'estero, facendo uso dei diversi tipi di strumenti (Bessel, Brunner, Ibañez, Repsold-Comstock, ecc.) si può asserire che solo in pochi e rari casi si è ottenuto valori così bassi per l'error medio accidentale di misura (Ivice: $\pm$ 0.32 mill. per chilometro di base misurata; Makon: $\pm$ 0.43 mill.; Madridejos: $\pm$ 0.40 mill.; Strehlen: $\pm$ 0.76 mill.; Catania $\pm$ 0.85 e $\pm$ 0.47 ecc.). Nel tempo stesso poi, essendo stata fatta la misura di andata e ritorno in sole 33 ore di lavoro effettivo di misura, risulta che la velocità media è stata di circa 210 metri all'ora, superata solo in occasione della base di Meppen, mentre si ebbero velocità di soli 86 metri in quella di Grossenhain, di 125 e 187 in quelle di Königsberg e Gottinga, di 40 in quella di Strehlen, di 120 in quelle di Mahon ed Ivice, di 70 in quelle americane del nord, e di 56 nelle più recenti francesi. Questi due fatti giustificano pienamente l'uso dei fili di acciaio « invar » anche nelle misure di basi geodetiche di precisione, essendo apparso evidente che pur di usare le precauzioni necessarie a tali generi di lavori, l'errore che può risultare per ciò che riguarda le misure non è di ordine di grandezza superiore a quello che si può avere con altri sistemi. La parte più debole del sistema rimane sempre nella sicurezza relativa che si può avere nella invariabilità assoluta della lunghezza dei fili: l'aver usato però contemporaneamente quattro fili ritengo possa esser sufficiente a svelare va-

riazioni di tal genere: e lo studio accurato dei risultati offrirà campo nella relazione definitiva di chiarire questo punto.

Per ora si può asserire ad ogni modo, che per opera della Marina italiana è stata compiuta, anche in mezzo al fragore delle armi, una delle operazioni più delicate della geodesia operativa, conseguendo risultati che non sono per nulla inferiori ai lavori più precisi fatti sia da noi che presso le altre nazioni del mondo.

Matematica. — *Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1ª specie tra spazî ad* n *dimensioni.* Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE (1).

1. Una reciprocità tra un S_n ed un S'_n:

$$\sum a_{ij} x_i y_j = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \dots, n) \tag{1}$$

si dice *degenere di specie* $h+1$ (e la chiameremo una S_h-reciprocità) quando il determinante $|a_{ij}|$ è di *rango* $n-h$: essa possiede allora, in S_n ed S'_n rispettivamente, un S_h ed un S'_h di punti singolari. Se a_{ij} sono forme lineari di parametri $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, e se a_{ij} è di rango $n-h$ per valori generici di questi, la (1) rappresenta un *sistema lineare* di S_h-reciprocità, che diremo *di specie* $h+1$. Esso si dirà *completo* quando non esiste un sistema lineare della stessa specie e di dimensione maggiore che lo contenga.

Dei teoremi delle due Note citate riportiamo i seguenti:

Per un fascio di S_h*-reciprocità tra* S_n *ed* S'_n *esistono in* S_n *ed* S'_n *due spazi* S_m, $S'_{m'}$, *tali che* $S_m(S'_{m'})$ *contiene tutti gli* $S_h(S'_h)$ *singolari ed ha, in tutte le reciprocità del fascio, lo stesso* $S'_{n-m+h}(S_{n-m'+h})$ *corrispondente passante per* $S'_{m'}$ *(per* S_m*). Ed i luoghi degli spazi singolari (supposti variabili sì in* S_n *che in* S'_n*) sono rispettivamente una* U^{m-h}_{h+1} *ed una* $V^{m'-h}_{h+1}$ *appartenenti ad* S_m *ed* $S'_{m'}$.

Ad es. per $h=0$, si ottengono, come luoghi dei punti singolari, delle curve razionali normali; per $h=1$, i luoghi delle rette singolari sono delle rigate razionali normali; ecc.

I sistemi lineari completi di reciprocità degeneri tra due piani π, π' *sono i seguenti: 1°) sistema* ∞^2, *di 2ª specie, delle reciprocità che hanno in* π *(o* π'*) una data retta singolare; 2°) sistema* ∞^5, *di 1ª specie, delle reciprocità che hanno in* π *(o* π'*) un dato punto singolare; 3°) sistema* ∞^4, *di 1ª specie, delle reciprocità in cui si corrispondono due rette, date rispettivamente in* π, π'; *4°) rete delle* S_0*-reciprocità definite dalle*

(1) Questa Nota si collega ad altre due, in corso di stampa negli Atti dell'Acc. di Torino, vol. 52 (1916-17): *Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazi ad* n *dimensioni*; *Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazi ad* n *dimensioni.*

∞^2 *proiettività tra fasci di rette che son contenute in un'omografia non degenere tra* π *e* π'.

Per un sistema lineare di S_h-reciprocità ha importanza il tipo del fascio generico in esso contenuto; se m . m' sono gli spazî d'immersione delle varietà costituite, in S_n ed S'_n, dagli spazî singolari delle reciprocità di quel fascio, indicheremo il sistema col simbolo $(m, m')_h$. Ci occuperemo in questa Nota delle reti $(1, n-1)_0$, supponendo $n > 2$.

2. Siano α_1 . α_2 . α_3 tre reciprocità della rete (fra loro linearmente indipendenti), di punti singolari A_1 . A'_1 ; A_2 . A'_2 ; A_3 . A'_3; che supporremo distinti e non allineati sì in S_n che in S'_n (1). Alla retta $r_{ij} \equiv A_i A_j$ deve corrispondere, in α_i ed α_j, uno stesso iperpiano ϱ'_{ij}, che passa per A'_i ed A'_j; questi tre iperpiani, supposti in posizione generica, si segano a due a due in tre S'_{n-2}: $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, omologhi del piano $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$ in α_1 . α_2 , α_3 rispettivamente, ed hanno in comune un S'_{n-3} . π' (situato su $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$).

In S_n, il luogo dei punti singolari delle reciprocità della rete è il piano σ, che risulta anzi riferito omograficamente alle reciprocità della rete; perciò gli S'_{n-1} omologhi d'un punto generico P di σ nelle ∞^2 reciprocità della rete formano solo un fascio, di asse un S'_{n-2} passante per π'. Questo sta sugli S'_{n-1} omologhi, in α_1 . α_2 . α_3 rispettivamente, delle rette PA_1, PA_2, PA_3, i quali, al variare di P in σ, descrivono, intorno a $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$, fasci proiettivi ai fasci di rette (di σ) di centri A_1, A_2, A_3; e due di queste proiettività individuano tra i punti di σ e gli S'_{n-1} per π' un'omografia ω che contiene anche la terza. Viceversa, se questo fatto si verifica, alle rette PA_i corrispondono, nelle tre proiettività anzidette, tre S'_{n-1} di un fascio, e perciò P è singolare per una reciprocità della rete $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Dunque: *Affinchè tre* S_0*-reciprocità generiche* α_1 . α_2 , α_3 *tra* S_n , S'_n, *di punti singolari* A_1 , A'_1 ; A_2 , A'_2 ; A_3 , A'_3, *determinino una rete* $(1, n-1)_0$, *è necessario e sufficiente che i fasci di iperpiani omologhi, in* α_1 . α_2 . α_3 *rispettivamente, dei tre fasci di rette* $A_1\sigma$. $A_2\sigma$. $A_3\sigma$ (*con* $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$), *corrispondano a quei fasci in tre proiettività contenute in una stessa omografia tra il piano* σ *ed una stella* ∞^2 *di iperpiani.*

3. Il luogo dei punti singolari in S'_n è una superficie razionale F', incontrata in un sol punto variabile dagli S'_{n-2} passanti per π', e che perciò

(1) Non ci fermiamo su casi troppo particolari. Così, se A_1, A_2, A_3 sono allineati, tutte le reciprocità della rete fanno corrispondere alla retta $A_1 A_2 A_3$ uno stesso S'_{n-1} passante per A'_1, A'_2, A'_3; allora, per $n = 3$ il luogo dei punti singolari, in S'_3, delle S_0-reciprocità della rete è il piano omologo della retta $A_1 A_2 A_3$; mentre per $n > 3$ è la superficie (razionale), in generale di ordine $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, che si ottiene trasformando (con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) la stella degli S_{n-1} di S_n che passano per $A_1 A_2$ nelle stelle di rette di S'_{n-1} di centri A'_1, A'_2, A'_3; e considerando il luogo dei punti per cui passano tre piani omologhi di queste stelle: a uno di tali punti corrispondono infatti tre S_{n-1} di S_n formanti fascio, e viceversa.

si può proiettare biunivocamente da π' sul piano $A'_1 A'_2 A'_3$, ad es. Un S'_{n-1} generico per π' corrisponde in ω ad una retta di σ, quindi sega F' in una C'^{n-1} (luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità di un fascio contenuto nella rete), ed in una curva fissa c', giacente in π', che ora determineremo (1).

Osserviamo perciò che gli ∞^{n-3} iperpiani di S_n passanti per σ sono mutati da α_1, α_2, α_3 nelle rette delle stelle di centri A'_1, A'_2, A'_3 e sostegni rispettivamente σ'_1, σ'_2, σ'_3, le quali segano su π' tre S'_{n-3} omografici sovrapposti; se esiste in π' un punto A' (di F') singolare per una reciprocità della rete, i suoi tre S_{n-1} omologhi in α_1, α_2, α_3 formano fascio intorno ad un S_{n-2} passante per σ, al quale corrispondono in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre piani per A'_1, A'_2, A'_3, seganti π' in rette (omologhe nelle omografie anzidette e) passanti per A'; e viceversa. Dunque c' è luogo dei punti per cui passano tre rette omologhe di tre S'_{n-3} omografici sovrapposti. Per determinarne l'ordine, scriviamo le equazioni di tre S'_{n-4} corrispondenti dei tre spazî omografici:

$$(2) \qquad \Sigma u'_i y_i = 0 \ , \ \Sigma u''_i y_i = 0 \ , \ \Sigma u'''_i y_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n-3);$$

si rappresenterà l'omografia dando u'_i, u''_i, u'''_i come forme lineari di $n-2$ parametri $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$, per modo che le (2) divengono lineari nei parametri, coi coefficienti forme lineari delle y_i. Sostituendo alle y_i le coordinate di un punto di c', per il quale passino le rette omologhe r', r'', r''', le equazioni stesse devono essere verificate da $n-4$ sistemi di valori delle t_i fra loro linearmente indipendenti (perchè per r' passano ∞^{n-5} iperpiani i cui omologhi passano essi pure per il punto y_i); e viceversa. Dunque le y_i annullano tutti i determinanti di 3° ordine della matrice (di 3 linee ed $n-2$ colonne) dei coefficienti di $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$; ossia c' è, in generale, di ordine $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ (2); ed F' quindi di ordine

$$(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) = \tfrac{1}{2} n(n-3) + 2 \ (3).$$

(1) Nel ragionamento che segue si supponga $n > 4$. Per $n = 3$, lo spazio π' si riduce ad un punto, che sta su F', perchè ha per omologo il piano σ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (anzi, esso sarà singolare per ∞^1 reciprocità della rete, formanti un fascio, contenente due S_1-reciprocità). Per $n = 4$, π' è una retta che sta su F', perchè ad ogni suo punto corrispondono in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre S_3 passanti per σ, quindi formanti fascio.

(2) Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Lincei, (5) 9_2 (1900), pp. 253-260, n. 3. Si veda pure: Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, § 112; Lorenzola, *Sul luogo di un punto base comune a $k+1$ sistemi lineari di forme di dimensione $h+1$ corrispondenti in altrettanti sistemi lineari omografici di specie $k+h+1$*, Rend. Ist. Lomb., (2) 36 (1903), pp. 162-176.

(3) Da qui in poi si includano di nuovo i valori 3, 4 di n, per i quali c' diviene rispettivamente un punto od una retta.

La curva C'^{n-1} luogo dei punti singolari, in S'_n, delle reciprocità del fascio $\alpha_1 \alpha_2$ (che è generico entro la rete) si appoggia a c' in $n-2$ punti, perchè gli spazî σ'_1, σ'_2 si corrispondono nella proiettività fra le stelle A'_1, A'_2 che genera C'^{n-1}; perciò proiettando F' da π' su un piano generico, le ∞^2 C'^{n-1} di F' date dagli ∞^2 fasci della rete (le quali formano su F' una rete omaloidica), si proiettano nelle rette del piano, e le sezioni iperpiane di F' in curve di ordine $n-1$, incontrantisi a due a due in $\frac{1}{2}n(n-3)+2$ punti variabili. La curva c', che forma una sezione iperpiana di F' insieme con una qualunque di quelle C'^{n-1}, ha per immagine una curva di ordine $n-2$, γ, segante le immagini delle sezioni iperpiane in $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ punti variabili ed in $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ punti fissi. Sono questi ultimi i punti base del sistema lineare L rappresentativo di F'; ognuno di essi è immagine d'una retta di F', parte di (∞^1) C'^{n-1} della rete omaloidica, perciò singolare per una S_1-reciprocità contenuta nella rete (la cui retta singolare in S_n è incidente al piano σ).

Gli $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ punti base del sistema L possono, in casi speciali (dipendenti da particolarità della curva c'), non essere distinti; possono anche 3 o più di essi venir sostituiti da un punto base multiplo di L, ed allora l'ordine di F' si abbassa; però F' è sempre normale, se no la curva c' farebbe parte d'un sistema infinito di curve, ognuna delle quali starebbe in un iperpiano con ciascuna delle ∞^2 C'^{n-1} della rete omaloidica.

4. Viceversa, si prendano in un piano dei punti $P_1, P_2, \ldots, P_j$ (distinti o no), e si assegnino per ciascuno delle multiplicità $s_1, s_2, \ldots, s_j$, in modo che sia:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} s_i(s_i+1) = \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1),$$

e che esista *una* curva di ordine $n-2$, γ, passante per essi con le date multiplicità. Il gruppo base considerato rappresenterà $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ condizioni lineari indipendenti anche per curve di ordine $> n-2$; quindi definirà un sistema lineare (*regolare*) di curve di ordine $n-1$, di dimensione: $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}(n-2)(n+1) = n$, e di grado: $(n-1)^2 - \Sigma s_i^2$; immagine di una superficie razionale normale F' di un S'_n. Su questa esiste una curva di ordine $(n-1)(n-2) - \Sigma s_i^2$, di immagine γ, appartenente ad un S'_{n-3}, π', e gli iperpiani per π' segano su F' ∞^2 C'^{n-1} d'una rete omaloidica, ognuna delle quali ha $n-2$ punti su π'. Costruiremo tra S'_n ed un S_n una rete di S_0-reciprocità i cui punti singolari in S'_n abbiano per luogo F'.

Perciò consideriamo le ∞^{3n-1} quadriche di S'_n passanti per π'; quelle di esse che contengono due C'^{n-1} generiche della rete omaloidica esistente su F' ed un punto generico ulteriore di F' sono sottoposte a $2n+2$ condizioni lineari indipendenti, per modo che le quadriche contenenti π' ed F' sono *al più* ∞^{n-3}. D'altra parte, le quadriche per π' segano su F', fuori

di c', un sistema lineare la cui immagine sul piano sta nel sistema ∞^{2n-1} di C^n definito dal gruppo dei punti P_i; perciò le quadriche contenenti π' ed F' sono *almeno* ∞^{n-3}. Si conclude che F' sta su $n-2$ quadriche, linearmente indipendenti, che passano per π'.

Assunto π' come spazio fondamentale $y_0 = y_1 = y_2 = 0$, le coordinate dei punti di F' verificheranno perciò le equazioni:

$$y_0 L_r + y_1 M_r + y_2 N_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-2),$$

ove:

$$L_r \equiv \Sigma L_{ri} y_i \ , \ M_r \equiv \Sigma M_{ri} y_i \ , \ N_r \equiv \Sigma N_{ri} y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ora, tali equazioni provengono dall'eliminazione di $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tra le seguenti:

$$\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0 \ , \ \lambda_0 y_2 - \lambda_2 y_0 = 0 \ , \ \lambda_1 y_0 - \lambda_0 y_1 = 0 ,$$
$$\lambda_0 L_r + \lambda_1 M_r + \lambda_2 N_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-2).$$

E ciò prova che F' è luogo dei punti singolari, in S'_n, per le reciprocità della rete il cui determinante è:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0 L_{10} + \lambda_1 M_{10} + \lambda_2 N_{10} & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_0 L_{1n} + \lambda_1 M_{1n} + \lambda_2 N_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0 L_{n-2,0} + \lambda_1 M_{n-2,0} + \lambda_2 N_{n-2,0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_0 L_{n-2,n} + \lambda_1 M_{n-2,n} + \lambda_2 N_{n-2,n} \end{vmatrix}$$

Concludendo: *Il luogo dei punti singolari di una rete generale* $(1, n-1)_0$ *è in* S_n *un piano* σ, *ed in* S'_n *una superficie razionale normale* F' *di ordine* $\frac{1}{2}n(n-3)+2$, *rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine* $n-1$ *che passano per* $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ *punti generici. La rete contiene* $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ S_1*-reciprocità, le cui rette singolari in* S'_n *stanno su* F' *ed in* S_n *sono incidenti a* σ.

Ad es., in S_3, come superficie F' si ottiene una quadrica; in S_4 una F^4 intersezione di due quadriche, oppure una rigata cubica normale: ecc.

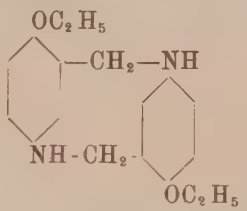
Astrofisica. — *Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza.* Nota di Mentore Maggini, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Gruppi di basi ottenute da amine aromatiche e formaldeide.* Nota di Roberto Lepetit e Carlo Maimeri, presentata dal Socio A. Angeli.

In una Nota precedente uno di noi ha menzionato (1) la trasformazione profonda che subisce una soluzione di nevralteina (para-etossifenilamidometan-solfonato di sodio) per ebollizione prolungata con l'aggiunta di acido cloridrico e la formazione fra altri corpi di una base dal P. F. 140° i cui sali sono dotati di proprietà anestetiche ed alla quale venne assegnata la formola $C_{18}H_{20}N_2O_2$.

Indagando la letteratura abbiamo trovato menzionata da G. Goldschmidt (2) la formazione di una base fondente a 140° C. il cui salicilato ha proprietà anestetiche, base che si ottiene facendo reagire un eccesso di formaldeide su una soluzione fortemente acida di cloridrato di p-fenetidina e ci venne il dubbio che tale base potesse essere identica a quella sopramenzionata. Il Goldschmidt le attribuisce la formola $C_{18}H_{22}N_2O_2$ e propone la formola di costituzione



e spiega la formazione della base per l'azione di due molecole di formaldeide su due molecole di fenetidina con l'eliminazione di due molecole di acqua, ammettendo la formazione intermediaria di un alcool per addizione di una molecola di formalina ad una di fenetidina.

Facendo reagire, analogamente alla fenetidina, della p.anisidina con formaldeide in soluzione cloridrica, Goldschmidt ottenne due sostanze di carattere basico fondenti a 122° l'una, a 170° l'altra di cui afferma che siano isomere e attribuisce loro la formola $C_{16}H_{20}O_2N_2$.

Si trova inoltre nella letteratura menzionata, in un lavoro del Tröger (3), una sostanza di carattere basico a cui viene dall'autore attribuita la for-

(1) Atti R. Acc. Lincei, vol. XXVI, 1° sem., fasc. 3° (1897).
(2) Chemiker Zeitung, *27*, pag. 395 (1917).
(3) Journ. für prakt. Chemie *36*, pag 225, anno 1887.

mola $C_{17}H_{18}N_2$ fondente a 131° C. ottenuta riscaldando p toluidina con metilale e acido cloridrico.

Finalmente è descritta dall' Erdmann (1) la formazione di una base cristallina fondente a 188° C., base di cui non è data l'analisi e che l'autore ottiene per azione della formaldeide pure in soluzione fortemente cloridrica sulla p.cloranilina.

Siccome avevamo ottenuto fra i prodotti di decomposizione della nevralteina con acidi una base anestetica dal P. F. 140° e da un analogo trattamento dell'acido p.metossifenilamidometansolfonico (che chiameremo nevralteina della p.anisidina) una base dal P. F. 122° C., nonchè fra i prodotti di decomposizione dell'acido tolilamidometansolfonico (nevralteina della p.toluidina) una base dal P. F. 137° C., era interessante di indagare se i prodotti summenzionati erano o no identici a quelli di punto di fusione eguale ottenuti direttamente dai varî autori citati dalla p.toluidina, dalla p.fenetidina o p.anisidina con formalina e acido cloridrico.

Dobbiamo anzitutto rilevare che supponendo una semplice differenza di omologia tra le basi $C_{18}H_{22}N_2O_2$ e $C_{16}H_{22}N_2O_2$ ottenute dal Goldschmidt dalla fenetidina e dall'anisidina, almeno una delle due formole deve essere errata. Il Goldschmidt infatti ammette la formazione della base $C_{18}H_{22}N_2O_2$ mediante eliminazione di due molecole di acqua da due molecole di fenetidina e due di formaldeide. Ragionando analogamente per l'anisidina, supponendo che la reazione anisidica abbia pure luogo con eliminazione di due molecole d'acqua, ossia

$$2C_7H_9NO + 2CH_2O - 2H_2O,$$

rimarrebbe $C_{16}H_{18}N_2O_2$ come formola della base dal P. F. 122° e non $C_{16}H_{22}N_2O_2$: una differenza cioè di 2 atomi di carbonio e di 4 atomi di idrogeno in meno della base della fenetidina, essendovi due metossili al posto di due etossili. Ad una formola $C_{16}H_{18}N_2O_2$ per il derivato della p.anisidina dovrebbe per analogia corrispondere $C_{16}H_{18}N_2$ per la base ottenuta dal Trögen dalla toluidina ed egli le attribuì invece la formola $C_{17}H_{18}N_2$!

Volendo quindi stabilire fra le già citate basi ottenute dalle nevralteine mediante l'azione degli acidi, l'identità con le basi di Tröger e di Goldschmidt, occorreva anzitutto preparare quest' ultime e verificare accuratamente le formole, sia per rettificare quelle presumibilmente erronee introdottesi nella letteratura, sia per poter stabilire che la reazione avviene identicamente nei varî casi e dimostrare che essa dà luogo alla formazione di una nuova classe di sostanze derivate da un determinato tipo.

(1) D. R. P. (Brev. germanico) Kl. 12, n. 121506 del 1901.

Preparazioni di basi mediante trattamento di amine aromatiche sostituite in para.

Data la mancanza d'indicazioni precise nella pubblicazione di Goldschmidt [1], abbiamo operato nelle nostre esperienze adoperando i cloridrati dell'amina con l'acqua strettamente necessaria per tenerli disciolti ad una temperatura non superiore a 60° C. aggiungendo una molecola di formaldeide agitando; lasciavamo quindi in riposo durante 48 ore.

Dalla p.fenetidina ottenemmo 4 basi distinte di cui una liquida: dalla p.anisidina ottenemmo 5 basi di cui una liquida; dalla p.toluidina 2 basi solide ed una liquida; dalla p.cloranilina sinora una sola base solida la quale non esclude che altre siano pure contenute nel miscuglio di reazione.

Azione della formaldeide sul cloridrato di para fenetidina.

Avendo a nostra disposizione forti quantità di fenetidina, ci occupammo particolarmente dello studio delle basi ottenute da questa, anche perchè fra esse primeggiava quella base dal P. F. di 140° ottenuta da Goldschmidt, il cui salicilato è dotato di proprietà anestetiche notevoli e perchè la supponevamo identica alla base dello stesso punto di fusione già ottenuta da uno di noi dalla nevralteina.

Procedendo per cristallizzazione frazionata si ottiene in quantità trascurabile un cloridrato quasi insolubile - A - mentre è predominante un cloridrato (« B ») meno solubile, anestetico senza sapore amaro ed in quantità minori un cloridrato (« C ») più solubile amarissimo.

Concentrando le acque madri ottenute dalla reazione dopo aver separato il miscuglio greggio dei tre cloridrati sopra enumerati, si ottiene dapprima una cristallizzazione di poco cloridrato B e C, separata la quale si ha una cristallizzazione di un cloridrato (« D »). Dal cloridrato D venne messa in libertà la base che si deposita come liquido oleoso.

Base dal cloridrato D — Monometilfenetidina.

La base liquida ottenuta dal cloridrato D, trattata con nero animale ed essiccata, distilla quasi interamente tra 102 e 104° C. a 4 mm. di pressione; è incolora ed ha un odore aromatico pronunciato che ricorda quello del finocchio L'analisi diede:

[1] Loc. cit.

Sostanza gr. 0,2319: N 18,8 cc. a 22° C. e 758 mm. — Sostanza gr. 0,1235: CO_2 gr. 0,3238 e H_2O gr. 0,0940. — Sostanza gr. 0,1986: CO_2 gr. 0,5203 e H_2O gr. 1536.

	N	C	H
Trovato per cento	9,35	—	—
» » »	—	71,51	8,51
» » »	—	71,45	8,65
Calcolato per $C_9H_{13}N$ (Metilfenetidina)	9,27	71,47	8,66

Benchè l'analisi corrisponda benissimo a metilfenetidina, per identificare in modo certo la nostra base ne paragonammo il nitrosocomposto con quello della metilparafenetidina preparata da p.metilformilfenetidina (1). Entrambi avevano eguali caratteri e fondevano a 47° C.

Cloridrati A, B, C, e relative basi.

Cloridrato A.

Date le piccolissime quantità (3 a 4 gr.) di questo cloridrato (molto poco solubile anche in acqua bollente) che si ottengono facendo reagire 200 gr. di fenetidina, ne abbiamo tralasciato per ora lo studio dopo aver determinato che gli corrisponde una base che ricristallizzata dall'alcool fonde a 146-147° C. ed è certamente diversa dalle seguenti

Cloridrati anestetici B e C.

Cloridrato anestetico insipido B.

Da questo ricavammo, come già detto, una base che fonde a 140° C. come la base di Goldschmidt e come la base fondente a 140° C che forma il principale prodotto di decomposizione della nevralteina. I cloridrati, bromidrati, jodidrati, lattati, salicilati, nonchè le basi stesse ottenute dalla nevralteina hanno identici caratteri, uguali sono le loro reazioni, non vi ha dubbio sulla identicità, ma si trattava di verificare anzitutto la formola di Goldschmidt: $C_{18}H_{22}O_2N_2$.

Analisi: Sostanza gr. 0,2734: N 22,6 a 18° C. e 749 mm. — Sostanza gr. 0,1847: CO_2 gr. 0,4940; H_2O gr. 0,1142. — Sostanza gr. 0,2183: CO_2 gr. 0,5851; H_2O gr. 0,1300.

	N	C	H
Trovato per cento	9,55	—	—
» » »	—	72,93	6,92
» » »	—	73,09	6,66
Calcolato per $C_{18}H_{20}N_2O_2$	9,46	72,92	6,80
» » $C_{18}H_{22}N_2O_2$	9,39	72,43	7,43
Goldschmidt trovò	9,67	72,85	7,00

(1) Wedekind e Fröhlich, Borichte, *40*, 1003 (1907).

Come si scorge, gli stessi dati analitici di Goldschmidt quadrano meglio per la nostra formola con 2H di meno, cioè: $C_{18}H_{20}N_2O_2$, che non per quella da lui calcolata.

Per trovare omologhi di peso molecolare più basso ove una differenza di due atomi d'idrogeno in meno fosse meglio rivelata dall'analisi, ricorremmo alla base che costituisce il prodotto di reazione predominante del cloridrato di anisidina con formaldeide e che fonde a 136° C. ed a quella ottenuta dal cloridrato di p.toluidina con formalina dal P. F. 131° secondo il Tröger; supponendo, come era lecito per analogia, che entrambe queste basi corrispondessero a quella dal P. F. 140° C. dalla p.fenetidina.

La base della p.anisidina dovrebbe, secondo noi, avere la formola $C_{16}H_{16}N_2O_2$ con 8,01 % di H, mentre la formola secondo Goldschmidt sarebbe $C_{16}H_{18}N_2O_2$ con 6,71 % di H. La base dalla p.toluidina dovrebbe avere, secondo noi, la formola $C_{16}H_{16}N_2$ con 6,83 % di H, mentre secondo Goldschmidt darebbe 7,51 % di H.

Rileveremo che una formola $C_{16}H_{16}N_2O_2$ è attribuita da Goldschmidt, senza dare dati analitici, ad una base dal P. F. 122° C. da lui ottenuta dalla p.anisidina, mentre non ci riuscì di separare una base fondente a 122° C. dal gruppo di quelle da noi ottenute dalla p.anisidina stessa. Per noi, fra queste, è una base fondente a 136° C. quella che corrisponde alla sovracitata base anestetica insipida fondente a 140° C. ottenuta dal cloridrato B.

Analisi della base P. F. 136° della p.anisidina: I) Sostanza gr. 0,2065: N 19,2 cc. a 22°,5 C. e 765 mm. — II) Sostanza gr. 0,1705: N 16 cc. a 23° C. e 756 mm. — III) Sostanza gr. 0,2156: CO_2 gr. 0,5666 e H_2O gr. 0,1170. IV) Sostanza gr. 0,1857: CO_2 gr. 0,4860 e H_2O gr. 0,1010.

	N	C	H
I) Trovato per cento	10,67	—	—
II) » » »	10,39	—	—
III) » » »	—	71,67	6,07
IV) » » »	—	71,36	6,08
Calcolato per $C_{16}H_{16}O_2N_2$	10,44	71,60	6,01
» » $C_{16}H_{18}O_2N_2$ (Goldschmidt)	10,37	71,07	6,71

Analisi della base P. F. 137° dalla p.toluidina. — Fra le varie basi ottenute dalla p.toluidina ve n'è una che fonde a 137° C. e che rappresenta, secondo noi, quella che corrisponde alla base dal P. F. 140° C. dalla fenetidina ed a quella dal P. F. 136° C. dall'anisidina testè discusse.

Quattro analisi accurate (1) diedero:

I) Per sostanza gr. 0.1776: CO_2 gr. 0.5275 e H_2O gr. 0.1086. — II) Per sostanza gr. 0,1776: CO_2 gr. 0,5287 e H_2O gr. 0,1083. — III) Per sostanza gr. 0,1952: CO_2 gr. 0,5816 e H_2O gr. 0,1196. — IV) Per sostanza gr. 0,1333: CO_2 gr. 0,3968 e H_2O gr. 0,0820.

	C	H	N
I) Trovato per conto	81,01	6,81	—
II) » » »	81,19	6,82	—
III) » » »	81,25	6,85	—
IV) » » »	81,18	6,88	—
Calcolato per $C_{16}H_{16}N_2$	81,31	6,83	11,86
» » $C_{16}H_{18}N_2$	80,28	7,51	11,71

Con la scorta dei tre gruppi di analisi eseguite per le tre basi analoghe ottenute rispettivamente dalla fenetidina, anisidina, toluidina, ci riteniamo autorizzati ad assegnare a quelle tre basi le formole $C_{18}H_{20}O_2N_2$, $C_{16}H_{16}O_2N_2$, $C_{16}H_{16}N_2$. Ciò dato, devono venire cancellate definitivamente dalla letteratura chimica le formole $C_{18}H_{22}N_2O_2$, $C_{16}H_{20}N_2O_2$, attribuite dal Goldschmidt a due delle basi ottenute con formalina e HCl dalla p.fenetidina e dalla p.anisidina, nonchè la formola $C_{17}H_{18}N_2$ attribuita dal Tröger (2) ad una base ottenuta dalla p.toluidina con metilale e HCl.

L'equazione per la reazione ammessa dal Goldschmidt per spiegare la formazione della base anestetica insipida che ha il punto di fusione 140° C, è quindi anch'essa erronea. Questa base non può formarsi che attraverso un processo di riduzione con messa in libertà d'idrogeno.

Daremo in seguito la piena conferma che ciò avviene realmente, e diremo quale sia la funzione dei due atomi d'idrogeno disponibili i quali concorrono alla formazione della base.

Il

Cloridrato anestetico amaro C

che farà oggetto di una Nota ulteriore, data la mancanza di spazio per il maggiore sviluppo della presente Nota.

(1) Le determinazioni furono limitate a C e H poichè quella di N dà per le due formole $C_{16}H_{16}N_2$ e $C_{16}H_{18}N_2$ in discussione una differenza di solo 0,15 per cento di azoto contenuta nei limiti di errore.

(2) Journ. für prakt. Chemie, già citato

Geologia. — *Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta.* Nota I della dott.ssa Caterina Samsonoff-Aruffo, presentata dal Socio De Stefani.

Ho avuto a mia disposizione diversi campioni di colonie calcaree di *Lithothamnium*, raccolte dal prof. De Stefani in differenti località dell'Isola di Malta, specialmente nei calcari Elveziani del Miocene medio (1).

Di questo materiale ho studiato quattro campioni che formeranno l'oggetto di queste Note.

Il primo campione che forma l'oggetto di queste Note fu raccolto dal prof. De Stefani nell'Elveziano, a Kala (Gozo) nella zona a *Nulliporae* (*Lover coralline Limestone* Murray) nell'arcipelago di Malta; esso è rappresentato da un conglomerato calcareo formato da numerose lamine (2,4 mm.) variamente ripiegate e contorte, cementate fra loro da sabbia e frammenti di conchiglie, anastomizzate o anche sovrapposte in modo da formare croste più spesse. Fra queste croste si trovano numerose cavità irregolari. Alla sua superficie questo tallo crostoso è ricoperto di protuberanze mammillari, molto brevi, arrotondate, ma non rigonfiate all'apice.

Di queste protuberanze non ve n'è che una integra di 2 mm. di diametro, le altre sono tutte in parte rotte o consumate. La superficie esterna delle croste, quanto la loro superficie di frattura — sono bianche qualche volta striate di giallognolo; le protuberanze fratturate appaiono spesso giallognole nell'interno. Ho visto qualche concettacolo ad occhio nudo sulle superfici di frattura del conglomerato; essi sono piuttosto grandi ed hanno forma ovale. Passando ora allo studio microscopico di questo esemplare vediamo che nel nostro preparato sono stati sezionati diversi rami dell'alga inclusa nel conglomerato calcareo. Osservando la preparazione alla luce riflessa vediamo subito anche a occhio nudo che uno dei rami si presenta affatto differente da tutti gli altri — bianco, compatto uniforme con 2 o 3 piccole cavità ovali, mentre gli altri rami sono assai meno compatti, presentano nel centro un piccolo nucleo bianco opaco e verso la periferia un'altra striscia di tessuto denso, mentre la gran massa del tallo è formata da un tessuto meno compatto più trasparente e più scuro, solcato da numerose e sottili linee concentriche. Al microscopio vediamo che la parte centrale chiara (alla luce riflessa) appare scura perchè più compatta; essa è formata da cellule

(1) C. De Stefani, *L'Arcipelago di Malta*. Rend. Acc. Lincei, Cl. di sc. fis. 5 e 19 gennaio 1913.

arrotondate di media grandezza, sezionate trasversalmente. Non avendo io nessuna sezione longitudinale del tallo non so se posso considerare questa parte midollare come formata dall'ipotallo; ad ogni modo mi pare che vi sia somiglianza notevole — se forse non identità — fra il tessuto del midollo e quello della corteccia. Con un'ingrandimento maggiore si vede che le cellule del midollo sono poligonali, chiare, con punto scuro nel mezzo, molto stipate fra loro; mancano le cellule doppie del Pilger. Il diametro di queste cellule, che ho potuto misurare col micrometro oculare, è abbastanza ampio e varia poco. Il midollo è unito alla porzione corticale da una zona di passaggio, dove le cellule sono tagliate obliquamente. La porzione corticale rappresenta una zonatura concentrica molto evidente.

Le zone *chiare* e *scure* si alternano: più larghe le prime, strette le seconde. Le zone chiare sono formate di cellule rettangolari, un po' più lunghe che larghe, di dimensione media poco variabile (le misure non si sono potute prendere visto lo stato poco buono di conservazione del tallo). Le cellule sono disposte in serie radiali molto evidenti, ma manca però l'aspetto a grata o reticolo. Il tessuto è compatto e regolare, le pareti cellulari sono sottili; il lume è grande e molto rifrangente: nella zona senza le cellule sono molto più piccole, quadrate, a pareti più spesse. Lo sviluppo singolo e relativo delle zone scure e chiare è molto variabile a seconda dei punti del tallo, ma quasi sempre la zona chiara è molto più sviluppata di quella scura, specialmente nella parte profonda del tallo.

La disposizione concentrica delle zone è spesso disturbata da irregolarità; le zone si accavalcano reciprocamente o hanno un'andamento ondulato.

Verso la periferia le zone diventano sempre meno evidenti. Il tessuto forma verso la superficie del ramo una sola massa scura traversata da linee più o meno parallele; le cellule sono piccole, quadrate (come nella zona scura), a pareti spesse. Il tallo diventa meno regolare e racchiude delle cavità e delle discontinuità dovute certamente ad azioni traumatiche esterne. Uno dei rami più piccoli presenta nel suo interno due nuclei midollari, circondati da una corteccia comune a zone concentriche, ciò che indicherebbe l'esistenza della ramificazione dicotomica.

Non ho potuto trovare nel tallo dei concettacoli maturi e sviluppati, ma nella corteccia di uno dei rami in tre punti differenti ho trovato delle cavità (?) ellittiche, riempite totalmente o in parte da elementi assai più grandi delle cellule ordinarie, molto allungati, disposti in due o tre strati sovrapposti e formanti delle file verticali molto evidenti. Il passaggio fra questi elementi e le cellule vegetative laterali è graduale. Considero questi elementi come cellule-madri di spore e le cavità o corpi ellittici come concettacoli tetrasporici in via di sviluppo. Uno di questi giovani concettacoli si troverebbe ad un grado più avanzato di sviluppo che non gli altri due.

Come abbiamo già detto uno dei rami più grossi, sezionati nella preparazione, si presenta affatto diverso da tutti gli altri. In questo ramo sono presenti e ben distinti fra loro ambo le specie di tessuti: l'*ipotallo* ed il *peritallo*. Questi due tessuti si sovrappongono reciprocamente e si alternano in tutto lo spessore del tallo. Nella parte più importante del ramo intorno agli organi di riproduzione lo sviluppo del peritallo è considerevole; in genere si può dire che il peritallo è maggiormente sviluppato dell'ipotallo, però in molti punti lo sviluppo dei due tessuti è equivalente. Ciò che distingue questo ramo dagli altri rami della preparazione è il volume rilevante degli elementi cellulari, la loro forma quasi quadrata, la mancanza di zone colorate e l'aspetto poco regolare del tessuto in paragone con gli altri rami.

L'ipotallo è formato di cellule rettangolari, leggermente allungate o quasi quadrate. La lunghezza delle cellule varia assai di più che non la loro larghezza che è molto più uniforme; il rapporto $\frac{\text{larghezza}}{\text{lunghezza}}$ varia fra $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Nell'ipotallo si trovano qua e là delle cellule più grandi, pentagonali dove il rapporto è $\frac{1}{2}$. Però dalle misure prese possiamo vedere che in complesso le cellule variano poco nelle loro dimensioni, che perciò il tessuto dell'ipotallo ha un'aspetto regolare ed uniforme.

La linea del Rosanoff (in cui le file cellulari corrono più o meno parallele fra loro) è molto bassa e spesso poco o punto distinta. Generalmente le file cellulari si inarcano subito dirigendosi verso il peritallo. L'aspetto caratteristico *a ventaglio* manca o è pochissimo sviluppato. La distinzione fra i due tessuti è molto netta ma il passaggio non è tanto brusco. In un punto della preparazione ho potuto osservare due striscie di ipotallo, che si erano accresciute in direzioni opposte, dirigendosi l'una contro l'altra. Nel punto d'incontro delle due striscie esse, mettendosi in contatto, non si fondono (come fu già rilevato dal Rosanoff nel 1866) ma si inarcano dirigendosi in alto e continuano a crescere in questa direzione. Questo modo interessante di accrescimento è ben evidente nella nostra preparazione. Nell'ipotallo, come abbiamo detto, si trovano sparse poche cellule pentagonali più voluminose, gli *eterocisti*. Nei punti dove l'ipotallo è stato sezionato trasversalmente si possono osservare numerose e grosse *cellule doppie* e *triple* del Pilger; in genere le cellule dell'ipotallo in sezione trasv. sono arrotondate o poligonali, le pareti sono spesse e rinfrangenti ed il lume è piccolo.

Le cellule del peritallo non differiscono molto per la loro forma e dimensione da quelle dell'ipotallo: esse sono soprattutto più corte ma quasi ugualmente larghe che queste ultime; il loro volume varia poco. Considerando questa uniformità nelle dimensioni delle cellule del peritallo, vediamo

che la poca regolarità del tessuto è dovuta alla loro disposizione reciproca ed al modo del loro accrescimento. Infatti i setti tangenziali e radiali non si trovano in continuazione fra loro, manca completamente l'aspetto a grata o reticolo; malgrado la poca variabilità delle cellule l'aspetto del tessuto è poco regolare. Le pareti delle cellule sono sottili e poco evidenti, specialmente quelle radiali. Nel peritallo si trovano non di rado delle cellule più grosse pentagonali, gli *eterocisti*. Intorno ai concettacoli il peritallo sembra diventare più compatto, le cellule leggermente più piccole e più allungate. Alla periferia il tallo è limitato da uno strato di cellule molto regolari, quadrate, strettamente unite fra loro ed aventi la loro parete esterna ispessita.

Nella porzione mediana del ramo troviamo quattro cavità ellittiche, le quali per la loro forma regolare, per la loro disposizione entro il tallo e per l'aspetto del tessuto che le circonda debbono essere considerate come concettacoli. Uno di questi concettacoli ha una forma particolare, esso è cioè provvisto di una prominenza piuttosto voluminosa nella parte centrale del pavimento e di un collo breve, ristretto nella sua porzione basale e dilatato a forma di bottone verso l'apice. I concettacoli (salvo l'ultimo) hanno una forma ellittica assai schiacciata, con l'asse trasversale molto allungato, col pavimento piano o leggermente sollevato nel mezzo, tetto pianeggiante o un po' concavo, pareti laterali arcuate.

I concettacoli sono vuoti o riempiti di calcare; in uno di essi si vedono le file cellulari del tetto un po piegate all'infuori a modo di ventaglio. Il tetto è spesso, specialmente nel mezzo, ed assai ben delimitato.

Riassumendo tutte queste osservazioni, vediamo che in questo esemplare, di Kala, si trovano riunite nello stesso conglomerato due alghe ramificate, appartenenti a *due generi differenti*.

Una di queste specie, rappresentata nella preparazione da diversi rami sezionati, possiede una struttura zonata in cui non si distingue che una sola specie di tessuto. La sua struttura è quella di un *Lithothamnium*, e ricorda molto il *Lithothamnium tophiforme* Unger, che ho già trovato [1] nel calcare ad *Amphistegina Pliocenico* in diverse località (Nettuno, Pianosa e Bagni di Casciana). Però la nostra alga non è una specie esclusivamente (o quasi) ramificata come il *Lithothamnium tophiforme* Unger; essa è rappresentata da un tallo crostiforme abbastanza sviluppato e di discreto spessore, traversato da numerose cavità e munito alla sua superficie di piccole prominenze tubercolari o verruciformi. Questo fatto avvicina molto la nostra specie tanto nel suo aspetto esterno, come anche nella sua struttura anato-

[1] Caterina Samsonoff-Aruffo, Il *Lithothamnium tophiforme di Unger nel calcare ad Amphistegina di Nettuno, di Pianosa e dei Bagni di Casciana* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. XXV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 5° (1916).

mica al *Lithothamnium intermedium* Kjell (1). L'esemplare raccolto è abbastanza logorato alla sua superficie, malgrado ciò esso si avvicina assai alla descrizione data dal Kjellmann della sua specie, come anche alla fig. 1 della tavola 4. del suo lavoro sopracitato. Oltreciò nella nostra pianta ho trovato tre giovani concettacoli in via di sviluppo, completamente affondati e rinchiusi entro il tessuto vegetativo: ora nel *L. tophiforme* Unger i concettacoli non sono mai affondati, come si può vedere dalla descrizione data per questa specie dal Kjellmann ed anche da me (2); mentre nel *Lithothamnium intermedium* i concettacoli sono affondati (3).

Del resto vi è grande affinità fra il *Lithothamnium tophiforme* Unger ed il *Lithothamnium intermedium* Kjell. (vedi Lemoine pag. 52), e questa grande affinità verrebbe aumentata dalla presenza di quest'ultima specie in terreni press'a poco della stessa età del *Leithakalk*, dove per la prima volta fu trovata la specie descritta da Unger.

Visto la corrispondenza della mia preparazione e del mio esemplare colle figure e la descrizione del Kjellmann considero che la specie di Kala (Gozo) sia il

Lithothamnium intermedium Kjell.

Nella stessa preparazione come abbiamo già visto è stato sezionato un ramo di struttura affatto diversa dagli altri rami, appartenenti al *Lithothamnium intermedium* Kjell. In questo ramo sono presenti e ben distinti tanto l'ipotallo che il peritallo, che si sovrappongono reciprocamente e si alternano in tutto lo spessore del tallo. Le cellule sono piuttosto grandi, quasi quadrate, mancano le zone colorate; il tessuto è poco regolare, malgrado che le dimensioni delle cellule sieno piuttosto uniformi. L'ipotallo si avvicina al tipo *Lithophyllum*, contiene degli *eterocisti* e delle cellule *doppie* e *triple del Pilger*: gli eterocisti si trovano anche nel peritallo. In uno dei concettacoli ho trovato che il collo era ristretto verso la base e che la parte mediana del pavimento era prominente. Considerando tutti questi caratteri riuniti insieme, vediamo che la nostra specie deve essere riportata al gen. *Goniolithon*. Ho trovato già questo genere nel miocene medio di Rakovička (Albania) (4). Il ramo di *Goniolithon*, sezionato in questa preparazione, somiglia assai alla sopracitata descrizione della struttura anatomica del *Goniolithon Martelli* Sam.; anche le dimensioni delle cellule del peri-

(1) Kjellmann, *The Algae of the Aretich* Sea. già citato, vedi pag. 97.

(2) Vedi lavoro sopracitato.

(3) Vedi Kjellmann (figg. 4 e 5, tav. 4).

(4) Dott. Caterina Samsonoff, *Sopra due alghe calcaree fossili della famiglia delle corallinaceae* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem. fasc. 6°, 1914).

tallo e dell'ipotallo, misurate col micrometro oculare sono identiche. Le differenze che si possono scorgere, come il maggiore sviluppo dell'ipotallo e la sua più grande regolarità nell'esemplare proveniente dall'Albania ecc., sono dovute al fatto che nell'esemplare trovato dal prof. Martelli fu studiata la struttura anatomica della crosta, mentre in quello raccolto dal prof. De Stefani fu studiata la struttura anatomica delle ramificazioni.

Visto tutto questo, come anche il fatto che i terreni dai quali provengono queste alghe fossili sono della stessa età considero che l'altra pianta raccolta dal prof. De Stefani a Kala (Gozo) sia il

Goniolithon Martellii Sam.

da me per la prima volta descritto.

Chimica fisiologica. — *Sulla genesi dell'urea.* I. *Può il tessuto muscolare generare l'urea?* Nota del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

La letteratura che riguarda la genesi dell'urea è assai estesa ed interessante: ma io tralascio per ora di farne cenno, perchè intendo svolgerla ampiamente, quando saranno completate le indagini che mi sono proposto di eseguire in base al risultato di alcune osservazioni fatte durante lo svolgimento di precedenti ricerche.

Credo però interessante di riferire senz'altro i dati di fatto da me osservati, in quanto essi sono sufficienti per dimostrare erronea l'opinione accolta dalla gran maggioranza degli autori, che l'urea abbia come sede di formazione esclusiva o prevalente il fegato.

In una serie già pubblicata di ricerche sul comportamento degli amino acidi nell'organismo (1), avevo notato che, facendo circolare in tessuto muscolare funzionante sangue contenente amino-acidi (glicocolla-asparagina-alanina), una notevole parte di essi scompariva, senza che alla loro diminuzione facesse riscontro un corrispondente aumento di NH_3 che giustificasse la loro scomparsa come dovuta a disaminazione.

Potevasi supporre che, o gli amino-acidi scomparsi avessero formato complessi non titolabili al formolo, o che avessero formato urea. Per controllare quest'ultima ipotesi, avevo iniziato studî particolari, atti a determinare la percentuale di urea esistente nel sangue contenente varî amino-acidi, prima e dopo la circolazione eseguita in tessuto muscolare funzionante. I primi risultati raccolti apparivano assai contraddittori, in quanto

(1) *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag 57-148-1870 (1915).

che in qualche caso ottenni notevole aumento di urea, mentre in altri casi, pur usando lo stesso amino acido non avvertivo nessun aumento (persino talvolta una lieve diminuzione dell'urea del sangue).

Lo stesso fenomeno, relativo alle variazioni nelle quantità dell'urea, venne da me ottenuto in ricerche di controllo eseguite adoperando sangue senza aggiunta di amino-acidi. Ed essendosi dato il caso che l'aumento più notevole di urea si avvertisse in una esperienza nella quale avevo usato un cane da poco alimentato con pasto di carne, mi sorse il dubbio che questa condizione (di trovarsi cioè l'animale da cui si preleva il materiale sperimentale in istato di digestione ed assorbimento di sostanze proteiche) fosse la causa dell'ottenuto aumento di urea in così cospicua misura. Le esperienze eseguite sino ad ora in questa condizione confermano tale ipotesi.

Riferisco nella presente Nota, oltre ad esse, alcune delle esperienze precedenti, nelle quali non avevo preso in considerazione le condizioni alimentari dell'animale, perchè esse servono a dimostrare come la presenza di amino acidi nel sangue circolante, non è di per sè una condizione sufficiente alla produzione di urea da parte del muscolo, anche quando, durante la circolazione, buona parte degli amino acidi si trasformano per azione del muscolo, in corpi non titolabili al formolo.

Tutte le esperienze vennero eseguite con cani di piccola taglia (5-8 kg.). Il sangue veniva liberato dall'NH_3 secondo il metodo di Folin, quindi trattato con acido tricloroacetico, e nel filtrato si dosava l'urea coll'apposito apparecchio di Ambard-Binet. Per tessuto muscolare si usava un arto posteriore.

Per le modalità dell'atto operatorio, pel dosaggio degli aminoacidi ecc., valgano le avvertenze date nelle precedenti Note. Nelle presenti ricerche non fu determinato il contenuto in urea del tessuto muscolare prima e dopo la circolazione. Sarebbe stato vantaggioso colmare questa lacuna, e così pure controllare i risultati ottenuti col dosaggio dell'urea, adoperando il metodo dell'ureasi, vantato nei recenti lavori come il più esatto. Non mi è stato possibile di far ciò per ragioni indipendenti dalla mia volontà (1). Ma come ho già detto, ritengo utile il riferire le esperienze fatte, perchè, se anche le future potranno modificare in qualche dettaglio la misura dei fenomeni riscontrati, non è probabile che infirmeranno i concetti generali che se ne possono trarre.

I.

Cane kg. 4,60. 20. XI. 1915; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 260. Sangue + Soluzione Ringer cc. 400 con 2,0 gr. α alanina. Durata della circo-

(1) L'Autore fu allontanato da Roma per servizio militare.

lazione 1 ora. Stimolazioni elettriche per $^1/_2$ ora al nervo sciatico, quindi direttamente ai muscoli. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione — 6-8 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,28 °/₀₀
» » dopo » » = 0,46 °/₀₀.
(Diminuzione degli amino acidi durante la circolazione = 17,5 °/₀).

II.

Cane kg. 5,600. 26. XI. 1915; ore 20. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 320. Sangue + soluzione di Ringer cc. 500 + 2,5 gr. α alanina. Durata della circolazione ore 1,15. Stimolazioni elettriche continue alternate al nervo sciatico ed ai muscoli nella prima ora. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,16 °/₀₀
» » dopo » » = 0,16 °/₀₀.
(Diminuzione degli amino acidi durante la circolazione = 12 °/₀).

III.

Cane kg. 6,200. 9. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 320. Sangue + soluzione Ringer cc. 500 + 3 gr. asparagina neutralizzata. Durata della circolazione ore 1 $^1/_2$. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo nella prima ora. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 5-6 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,22 °/₀₀
» » dopo » » = 0,28 °/₀₀.
(Non si determina la diminuzione degli amino acidi).

IV.

Cane kg. 5,600. 12. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 300. Sangue + soluzione Ringer cc. 500 + 2 gr. glicocolla. Durata della circolazione ore 1,15. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo nella prima ora. Pressione 180-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,25 °/₀₀
» » dopo » » = 0,42 °/₀₀.
(Non si determina la diminuzione degli amino acidi).

V.

Cane kg. 6,600. 26. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 360. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1 $^1/_2$. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 40 minuti. Pressione 180-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-12 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,18 °/₀
» » dopo » » = 0,18 °/₀.

VI.

Cane peso kg. 7,100. 18. III. 1916; ore 16. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 420. Cane alimentato alla mattina con pasto di carne. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1 $^1/_4$. Stimolazioni elettriche alternate al nervo

sciatico ed al muscolo per 45 minuti. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 10-12 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,32 ‰
» » dopo » » = 0,70 ‰.

VII.

Cane kg. 6,800. 26. III. 1916; ore 9. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 370. Cane alimentato alla sera precedente con pasto di carne. Sangue + soluzione di Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1 ½. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 45 minuti. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,30 ‰
» » dopo » » = 0,58 ‰.

VIII.

Cane kg. 7,400. 8. IV. 1916; ore 9. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 400. Cane alimentato alla sera precedente con pasto di carne. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 40 minuti. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 6-8 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,34 ‰
» » dopo » » = 0,62 ‰.

Dalle esperienze riferite risulta che:

1° Il sangue circolando nel tessuto muscolare funzionante può aumentare, e notevolmente, il suo contenuto in urea.

2° L'aggiunta di aminoacidi al sangue non costituisce una condizione necessaria, o quanto meno favorevole, affinchè si avverta tale aumento dell'urea: tanto è vero che in alcune esperienze nelle quali essi erano stati aggiunti in cospicua misura, ed anche scomparsi in elevata percentuale, non si ottenne l'aumento di urea (e neppure di NH_3 in misura sufficiente a giustificare completamente il deficit di aminoacidi, onde risulta probabile che essi abbiano costituito dei complessi non titolabili al formolo).

3° L'aumento di urea più elevato si ottenne sperimentando con tessuto muscolare e sangue di cane precedentemente alimentato con carne.

Questi risultati appaiono assai interessanti in quanto forniscono anzitutto un argomento positivo diretto della possibilità di formare urea da parte del tessuto muscolare, ciò che dai più è negato, specialmente in base alle osservazioni cliniche, secondo le quali nelle affezioni epatiche l'urea scompare progressivamente dall'urina parallelamente alla gravità dell'affezione.

Lasciando ad ulteriori indagini il còmpito di meglio confortare i risultati già ottenuti, io credo che fra i dati di fatto esposti dai clinici e quelli riferiti nella presente Nota, non ci sia quella contraddizione irriducibile che a prima vista può apparire.

Infatti abbiamo avvertito nelle nostre ricerche che, per ottenere una cospicua formazione di urea, è necessario adoperare tessuto muscolare e sangue di animale alimentato con carne (se con ambedue contemporaneamente o se con uno solo di questi fattori si possa raggiungere uguale risultato decideranno ulteriori apposite ricerche). Ciò dimostra che in questa condizione si deve essere immesso nel sangue o nel muscolo un qualche cosa dal quale ha origine l'urea.

Si può supporre che questo qualche cosa, che per ora non possiamo ancora indicare più esattamente, si produca nel fegato, salvo poi a trasformarsi in urea nel tessuto muscolare e magari anche negli altri tessuti. Per cui pur essendo il muscolo capace di formare l'urea, si renderebbe pur sempre necessaria l'azione del fegato per generare le sostanze dalle quali il muscolo può svolgere l'urea stessa.

Non dò naturalmente a questa ipotesi altro valore che quello di ipotesi di lavoro; essa pertanto ci avverte che fatti apparentemente contraddittori si possono comprendere ed integrare quando non ci si limiti a considerarli isolatamente.

In quanto al fatto che l'aggiungere aminoacidi al sangue circolante non basta da solo a determinare un aumento di urea, esso non deve venir senz'altro interpretato come la dimostrazione che queste sostanze non prendono parte alcuna alla genesi dell'urea stessa.

Alcune ricerche riguardanti (1) il consumo del glicosio da parte di tessuti isolati, mi dimostrarono che alcuni di essi (fegato, rene, ecc.) distruggono in gran copia il glicosio quando questo vien fatto circolare in un organo asportato da un animale ucciso durante l'assorbimento di idrati di carbonio, mentre se l'organo fu asportato da un animale da qualche giorno digiunante, poco o nulla del glicosio viene consumato. Per analogia si potrebbe supporre che per utilizzare gli aminoacidi e generare l'urea, si rendano necessarie condizioni simili.

Ma di tutti i problemi che sorgono in base alle ricerche qui riferite, di tutte le deduzioni e affermazioni più recise che se ne possono trarre, riferiremo ampiamente solo quando ci sarà possibile di completarle in modo soddisfacente, estendendo il dosaggio dell'urea anche al tessuto muscolare, modificando il metodo del dosaggio dell'urea stessa ecc. ecc.

Riuscendomi però impossibile per ora il dedicarmi a questi particolari studî, credo utile riferire questi primi risultati ottenuti, per l'interesse che essi assumono, pur mantenendo alla presente Nota il valore di una semplice Nota preventiva.

(1) *Sul metabolismo del glicosio in organi sopravviventi.* Nota V. *Influenza del digiuno sull'attitudine del fegato a consumare il glicosio in esso circolante.* In corso di stampa pel prossimo fascicolo dei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei.

E. M.